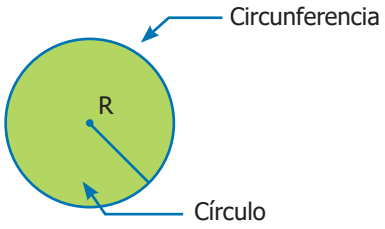
SECTOR CIRCULAR - NÚMERO DE VUELTAS

DESARROLLO DEL TEMA

I. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

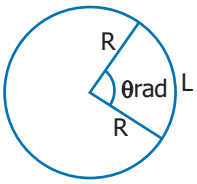


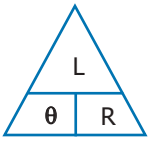
Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi R$

Área de círculo: $A = \pi R^2$

II. LONGITUD DE ARCO

Sea θ la medida de un ángulo trigonométrico.



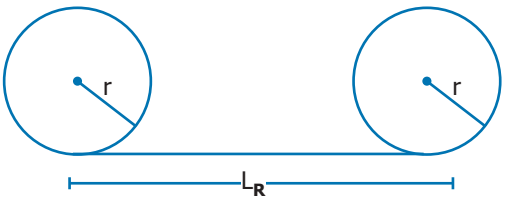


Fórmula básica

$$L = \theta R$$

$0 < \theta \leq 2\pi$

III. NÚMERO DE VUELTAS QUE GIRA UNA RUEDA SIN RESBALAR



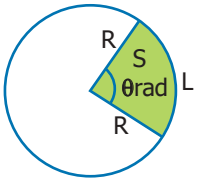
n: N.° de vueltas: $n = \frac{L_R}{2\pi r}$

L_R: Longitud del recorrido

Nota:
En el sector circular, la medida del ángulo central siempre debe estar expresada en radianes; entonces, es importante recordar:

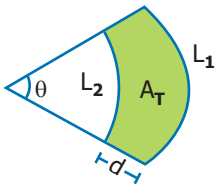
$$\pi \text{ rad} <> 180° <> 200^g$$

IV. ÁREA DE SECTOR CIRCULAR



$$S = \frac{1}{2}\theta R^2 \qquad S = \frac{1}{2}LR \qquad S = \frac{L^2}{2\theta}$$

V. ÁREA DE TRAPECIO CIRCULAR

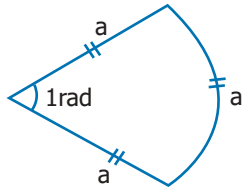


$$A_T = \left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)d$$

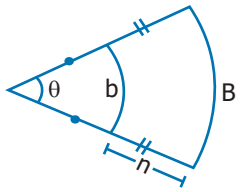
$$\theta = \frac{L_1 - L_2}{d}$$

$0 < \theta \leq 2\pi$

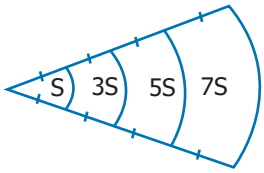
VI. PROPIEDADES

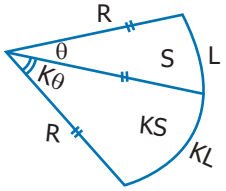
I. 

$L = R \leftrightarrow \theta = 1rad$

II. 

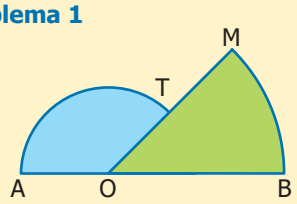
$\theta = \frac{B-b}{n}$

III. S: Área 

IV. S: Área
$K \in \mathbb{R}$ 

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1



De la figura, el área del sector circular AOT es igual al área del sector circular MOB. Si $OA = \frac{OB}{2}$, calcule la medida del ángulo BOT.

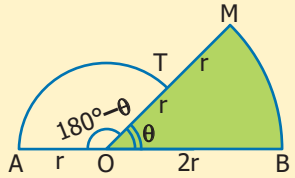
A) 30° B) 36° C) 94°
D) 38° E) 40°

UNMSM 2012–II

Resolución:

Sea $m\sphericalangle BOT = \theta$; $OA = \frac{OB}{2}$
$\rightarrow 2OA = OB$

Sea $\boxed{OA = r} \rightarrow \boxed{OB = 2r}$



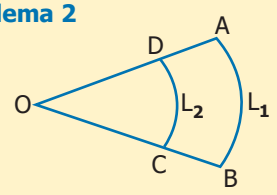
Dato: $S_{AOT} = S_{MOB}$

$\frac{1}{2}(180° - \theta)r^2 = \frac{1}{2}(\theta)(4r^2)$

Resolviendo $\theta = 36°$

Respuesta: 36°

Problema 2



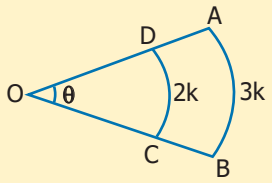
De la figura AOB y COD son sectores circulares, además $\frac{L_1}{3} = \frac{L_2}{2}$ y el área del sector circular DOC es $4u^2$. Calcule el área del trapecio circular ADCB.

A) 7 B) 14 C) 18
D) 12 E) 10

PRE-UNMSM 2012–II

Resolución:

$\frac{L_1}{3} = \frac{L_2}{2} = k$ $\begin{cases} L_1 = 3k \\ L_2 = 2k \end{cases}$



Dato:

$S_{COD} = \frac{(2k)^2}{2\theta} = 4 \rightarrow \boxed{k^2 = 2\theta}$

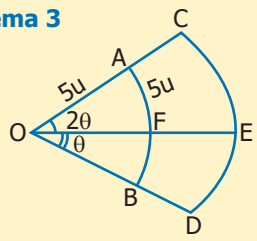
Incógnita

$S_{ADCB} = \frac{(3k)^2}{2\theta} - \frac{(2k)^2}{2\theta} = \frac{5k^2}{2\theta} = \frac{5(2\theta)}{2\theta}$

$S_{ADCB} = 5u^2$

Respuesta: $5u^2$

Problema 3



Del gráfico mostrado AOB y COD son sectores circulares. Indique el perímetro del sector circular COD.

A) 27 u B) 26 u
C) 25 u D) 28 u
E) 24 u

PRE UNMSM 2013–II

Resolución:

En el sector circular

$AOF \rightarrow (5) = (2\theta)(5)$

$\boxed{2\theta = 1}$ $\boxed{\theta = \frac{1}{2}\text{ rad}}$

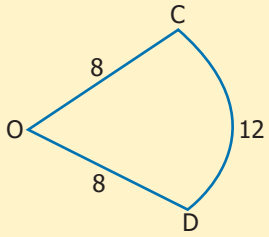
En el sector circular

$COD \rightarrow \widehat{EC} = (1)(8) = 8\text{ u}$

En el sector circular EOD $\rightarrow$

$\widehat{ED} = \left(\frac{1}{2}\right)(8) = 4\text{ u}$

Graficando el sector COD



Perímetro = 28

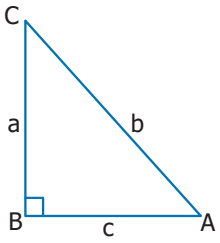
Respuesta: 28 u

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. CONCEPTOS PREVIOS

Triángulo ABC (Recto en B)



- a y c (longitud de los catetos)
- b (longitud de la hipotenusa)

- $b > a \wedge b > c$
- $m\angle A + m\angle C = 90°$
- $a^2 + c^2 = b^2$ (Teorema de Pitágoras)

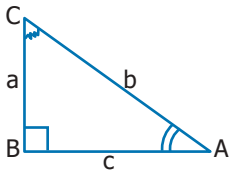
II. DEFINICIÓN

Con respecto a la $m\angle A$

- $\text{Sen A} = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{b}$
- $\text{Cos A} = \dfrac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{c}{b}$
- $\text{Tan A} = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \dfrac{a}{c}$
- $\text{Cot A} = \dfrac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \dfrac{c}{a}$
- $\text{Sec A} = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \dfrac{b}{c}$
- $\text{Csc A} = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \dfrac{b}{a}$

III. PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Dado un triángulo ABC (recto en B)



Se cumple:

A. Razones Recíprocas

$$\text{SenA} \cdot \text{CscA} = 1$$
$$\text{CosA} \cdot \text{SecA} = 1$$
$$\text{TanA} \cdot \text{CotA} = 1$$

Ejemplos:

- $\text{Sen}20° = \dfrac{1}{\text{Csc}20°}$
- $\text{Cos}50° \cdot \text{Sec}50° = 1$
- $\text{Tan}x \cdot \text{Cot}y = 1 \rightarrow x = y$

B. Razones Complementarias (Co-razones)

De las definiciones, en (II) se observa:

$$\text{Sen A} = \text{Cos C}$$
$$\text{Tan A} = \text{Cot C}$$
$$\text{Sec A} = \text{Csc C}$$

$$m\angle A + m\angle C = 90°$$

Ejemplos:

- $\text{Sen}70° = \text{Cos}20°$
- $\text{Sec}(30° + x) = \text{Csc}(60° - x)$
- $\text{Cos}(90° - a) = \text{Sen}a$
- $\text{Sec}\theta = \text{Csc}(90° - \theta)$
- $\text{Tan}(x + 10°) = \text{Cot}3x \rightarrow x + 10° + 3x = 90°$
  $4x = 80°$
  $x = 20°$

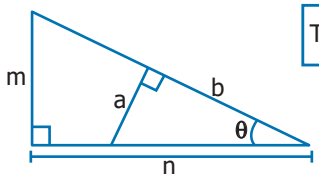
En General:

$$\text{R.T}(\beta) = \text{CO} - \text{RT}(90° - \beta)$$

C. El valor de una razón trigonométrica solo depende de la medida del ángulo de referencia

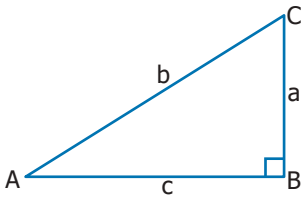
Sabemos:

$$\text{Tan}\theta = \frac{\text{C.O.}}{\text{C.A.}}$$



$$\text{Tan}\theta = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

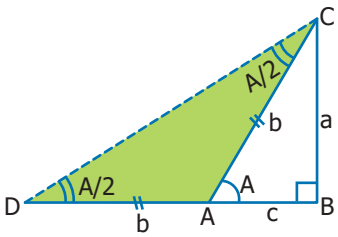
IV. TANGENTE Y COTANGENTE DEL ÁNGULO MITAD



$$\tan\frac{A}{2} = \csc A - \cot A$$

$$\cot\frac{A}{2} = \csc A + \cot A$$

Demostración:

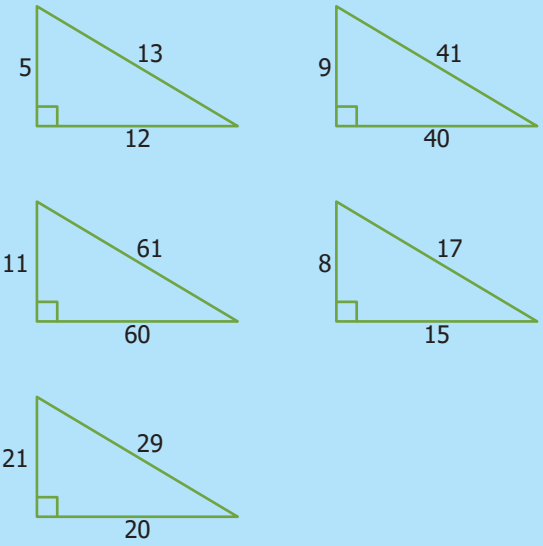


- Se prolonga el lado BA hasta el punto "D" tal que AD = AC.
- Formamos un triángulo isósceles uniendo "D" y "C"
- Del triángulo DBC

$$\cot\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

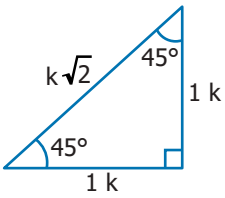
$$\cot\left(\frac{A}{2}\right) = \csc A + \cot A$$

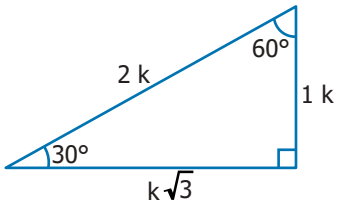
Observación:
Triángulos pitagóricos mas usados.



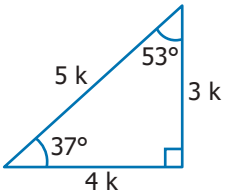
V. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

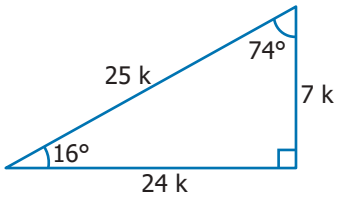
A. Exactos





B. Aproximados





VI. TABLA DE VALORES NOTABLES

	30°	60°	45°	37°	53°
Sen	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	3/5	4/5
Cos	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{2}/2$	4/5	3/5
Tan	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	1	3/4	4/3
Cot	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	1	4/3	3/4
Sec	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{2}$	5/4	5/3
Csc	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	5/3	5/4

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Halle el valor de:

$$\left[(2+\sqrt{3})\left(\frac{\text{Sen}60° - \text{Sen}30°}{\text{Sen}60° + \text{Sen}30°}\right)\right]^{2-\sqrt{3}}$$

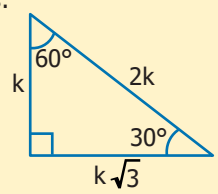
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $\sqrt{3}$

UNMSM 2014–I

Resolución:

Planteamiento

Sabemos:



Procedimiento

Sea:

$$P=\left[(2+\sqrt{3})\left(\frac{\text{Sen}60° - \text{Sen}30°}{\text{Sen}60° + \text{Sen}30°}\right)\right]^{2-\sqrt{3}}$$

$$P=\left[(2+\sqrt{3})\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}\right]^{2-\sqrt{3}}$$

$$P=\left[(2+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\right]^{2-\sqrt{3}}$$

Se racionaliza

$$P=\left[(2+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right)\right]^{2-\sqrt{3}}$$

$$P=\left[(2+\sqrt{3})\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\right]^{2-\sqrt{3}}$$

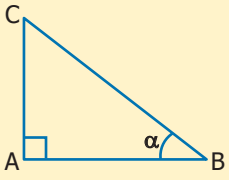
$$P=\left[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right]^{2-\sqrt{3}}$$

$$P=[1]^{2-\sqrt{3}} \rightarrow \therefore P=1$$

Respuesta: 1

Problema 2

En el triángulo BAC de la figura, AC = b cm y BC − AB = k cm donde b > k, halle $\text{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$



A) 2k B) kb C) $\frac{k}{b}$
D) $\frac{k}{a}$ E) 1

UNMSM 2012–I

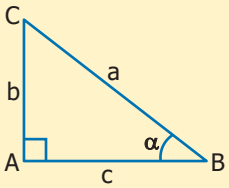
Resolución:

Análisis de datos

Sabemos:

$$\text{Tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\text{Csc}\theta-\text{Cot}\theta$$

Operación del Problema



$$\text{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\text{Csc}\alpha-\text{Cot}\alpha$$

Del gráfico

$$\text{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$$

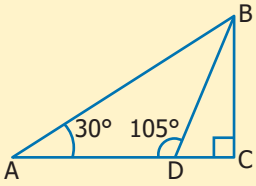
$$\text{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a-c}{b};\ \text{por dato } (a-c=k)$$

$$\text{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{k}{b}$$

Respuesta: $\frac{k}{b}$

Problema 3

En la figura, AD = 12cm, Halle BC

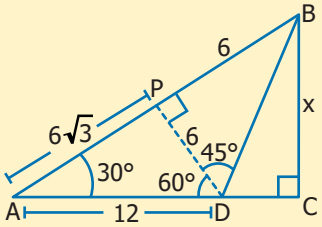


A) $3\sqrt{3}$ B) $3(\sqrt{3}+1)$
C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}-1$
E) $3(\sqrt{3}-1)$

UNMSM 2009–I

Resolución:

Análisis de datos:



Se traza $\overline{DP} \perp \overline{AB}$

◺ APD notable (30° y 60°)

→ AP = $6\sqrt{3}$ y DP = 6

◺ DPB notable 45°

→ PB = 6

En el ◺ ABC

$$\text{Sen}30° = \frac{x}{6\sqrt{3}+6} \rightarrow 3(\sqrt{3}+1)$$

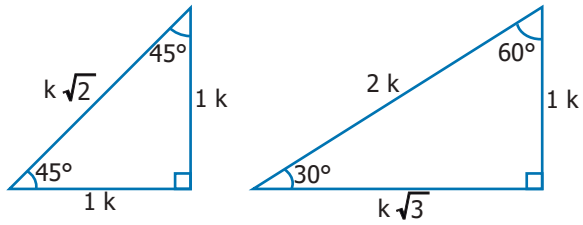
Respuesta : $3(\sqrt{3}+1)$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES - ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN

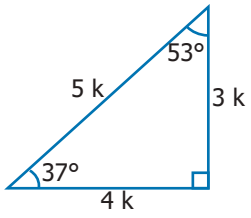
DESARROLLO DEL TEMA

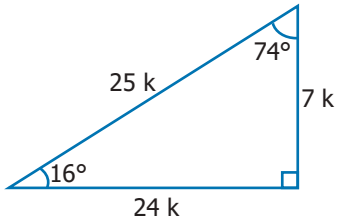
I. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

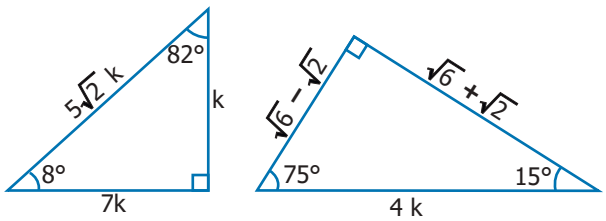
A. Exactos



B. Aproximados





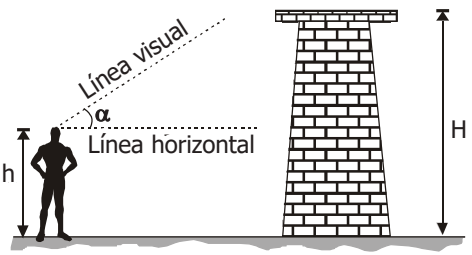


II. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

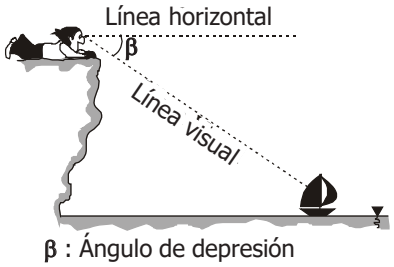
	30°	60°	45°	37°	53°
Sen	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	3/5	4/5
Cos	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{2}/2$	4/5	3/5
Tan	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	1	3/4	4/3
Cot	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	1	4/3	3/4
Sec	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{2}$	5/4	5/3
Csc	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	5/3	5/4

III. ÁNGULOS VERTICALES

Son aquellos ángulos ubicados en un plano vertical que, en la práctica, son formados por una línea visual (o línea de mira) y una línea horizontal, como resultado de haberse efectuado una observación. Estos resultados se clasifican en: **ángulos de elevación y ángulos de depresión**. (ver gráficos).

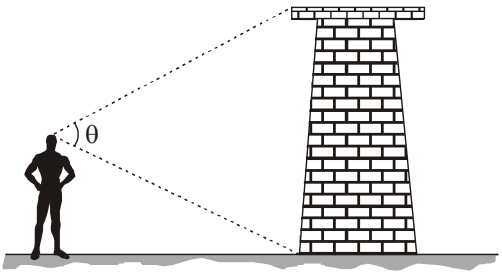


α: Ángulo de elevación



β : Ángulo de depresión

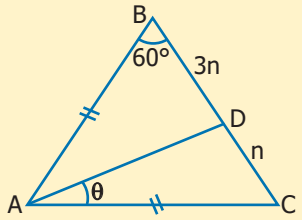
Consideración: En el gráfico adjunto. "θ" es el ángulo bajo el cual se divisa la torre. Note que deben trazarse las dos visuales; una hacia la parte alta y la otra hacia la parte baja. Luego "θ" es el ángulo formado por las dos visuales.



PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

En base a los datos de la figura calcular Tanθ.



NIVEL DIFÍCIL

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

Resolución:

Planteamiento:

- Completando los datos, el triángulo ABC es equilátero.
- Las alternativas del problema son números, entonces es conveniente asignar un valor a (n).

Análisis de los datos:

- Por el punto (D) se traza la perpendicular DP (P en AC).
- El triángulo DPC es notable de 30º y 60º.
- Sea n = 2.
- La longitud del lado del triángulo ABC es 8.

En el triángulo rectángulo sombreado (APD): $Tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{7}$

Respuesta: $\frac{\sqrt{3}}{7}$

Problema 2

Resolver:

$$\frac{x + 3Tan45°}{x - 3Tan45°} = \frac{2Sen37° + 1}{2Sen37° - 1}$$

NIVEL INTERMEDIO

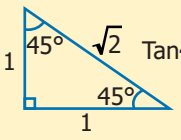
A) 1,2 B) 2,4 C) 3,6

D) 4,0 E) 5,8

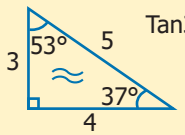
Resolución:

Planteamiento:

Sabemos:



$Tan45° = 1$



$Tan37° = \frac{3}{5}$

Por aritmética:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{m+n}{m-n} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Análisis de los datos:

Aplicando la teoría de proporciones:

$$\frac{x}{3Tan45°} = \frac{2Sen37°}{1}$$

Reemplazando y operando convenientemente:

$$\frac{x}{3(1)} = 2\left(\frac{3}{5}\right) \rightarrow x = \frac{18}{5} \rightarrow x = 3,6$$

Respuesta: C) 3,6

Problema 3

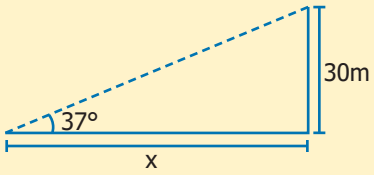
Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación de 37º. Si la altura del poste es de 30 m. ¿A qué distancia del poste se encuentra el punto de observación?

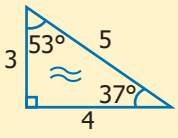
A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 50

Resolución:

Planteamiento:

Sabemos:





Análisis de los datos:

Considerando el triangulo notable de 37° y 53°, tomamos Tg37° en el gráfico del problema.

$$Tg37° = \frac{30}{x} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{30}{x} \rightarrow x = 40m$$

Respuesta: D) 40m

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. INTRODUCCIÓN

Sabemos que todo triángulo tiene seis elementos básicos, tres lados y tres ángulos.

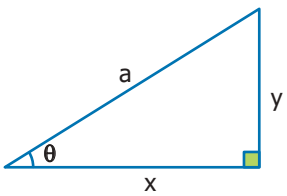
Además otros elementos auxiliares como alturas, medianas, bisectrices, etc.

Resolver un triángulo consiste fundamentalmente en hallar los elementos básicos de este, para lo cual debemos conocer por lo menos tres de sus elementos (necesariamente uno de ellos no angular).

II. TRES CASOS

1.er Caso

Conociendo la longitud de la hipotenusa y un ángulo agudo.



Para "x"

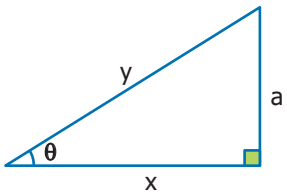
$\frac{x}{a} = Cos\theta \rightarrow x = aCos\theta$

Para "y"

$\frac{y}{a} = Sen\theta \rightarrow y = aSen\theta$

2.do Caso

Conociendo un ángulo agudo y longitud de su cateto opuesto.



Para "x"

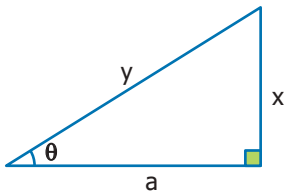
$\frac{x}{a} = Cot\theta \rightarrow x = aCot\theta$

Para "y"

$\frac{y}{a} = Csc\theta \rightarrow y = aCsc\theta$

3.er Caso

Conociendo un ángulo agudo y la longitud de su cateto adyacente.



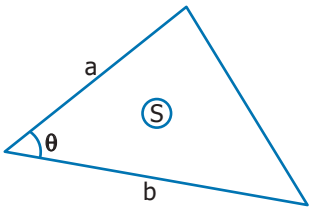
Para "x"

$\frac{x}{a} = Tan\theta \rightarrow x = aTan\theta$

Para "y"

$\frac{y}{a} = Sec\theta \rightarrow y = aSec\theta$

III. ÁREA DE REGIÓN TRIANGULAR

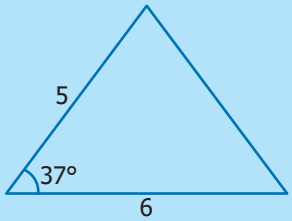


$S = \frac{a.b}{2} Sen\theta$

Ejemplo:

Calcule el área de la región triangular ABC, sabiendo que AB = 5 cm, AC = 6 cm y el ángulo comprendido entre dichos lados es igual a 37°.

Resolución:



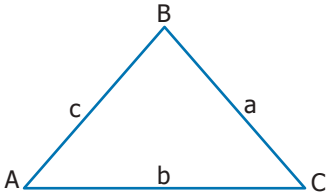
$S = \frac{1}{2} . 5 . 6 Sen37°$

$S = \frac{1}{2} . 5 . 6 \left(\frac{3}{5}\right)$

$S = 9\ u^2$

IV. LEY DE PROYECCIONES

En todo triángulo ABC; se cumple:



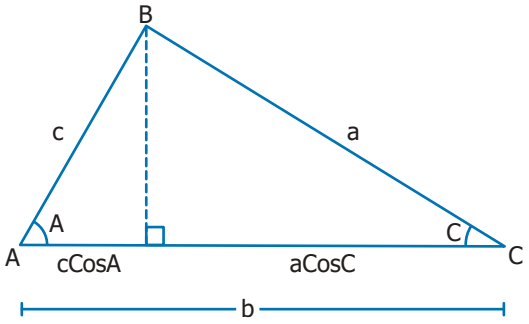
$aCosB + bCosA = c$

$bCosC + cCosB = a$

$aCosC + cCosA = b$

Prueba:

Trazando una altura y aplicando uno de los casos mencionados anteriormente llegamos a:



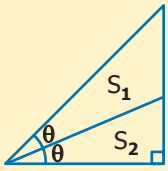
Se concluye:

$cCosA + aCosC = b$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

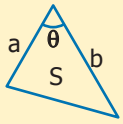
De la figura S_1 y S_2: áreas. Calcular $\frac{S_1}{S_2}$.



A) Senθ B) Cosθ C) Sec2θ
D) Csc2θ E) Sen2θ

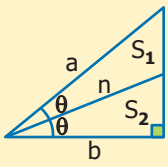
Resolución:

Sabemos



$$S = \frac{ab}{2}Sen\theta$$

Asignamos variables en la figura:



Aplicando fórmula:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{an}{3}Sen\theta}{\frac{bn}{3}Sen\theta} = \frac{a}{b}$$

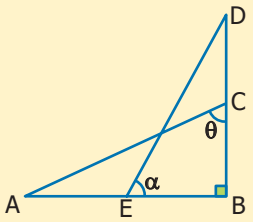
De la figura:

$$\frac{S_1}{S_2} = Sec2\theta$$

Respuesta: Sec2θ

Problema 2

De la figura AC = DE = a

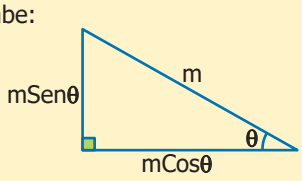


DC = b. Halla b/a.

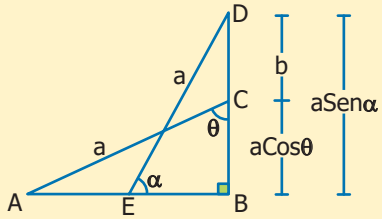
A) (Senα – Cosθ)
B) (Cscα – Secθ)
C) (Tgα – Ctgθ)
D) (Cscα – Cosθ)
E) (Cosθ – Cscα)

Análisis del problema:

Se sabe:



Resolución:



En el triángulo ABC,

$\frac{BC}{a} = Cos\theta \rightarrow BC = aCos\theta$

En el triángulo EBD,

$\frac{BD}{a} = Sen\theta \rightarrow BD = aSen\theta$

$aSen\alpha = aCos\theta + b \rightarrow a(Sen\alpha - Cos\theta) = b$

$\rightarrow Sen\alpha - Cos\theta = \frac{b}{a}$

Respuesta: (Senα – Cosθ)

Problema 3

Dado un triángulo ABC y siendo "p" el semi-perímetro determinar qué representa la siguiente expresión:

$K = (a+b)CosC + (a+c)CosB + (b+c)CosA$

A) 2p B) p C) p + a
D) p – a E) p + b

Resolución:

De acuerdo con la ley de proyecciones, se sabe:

Dado el triángulo ABC:

$aCosB + bCosA = c$
$aCosC + cCosA = b$
$bCosC + cCosB = a$

Planteamiento

Aplicando la propiedad distributiva:

$K = aCosC + bCosC + aCosB + cCosB + bCosA + cCosA$

Análisis de los datos

Agrupando convencionalmente:

$K = \underbrace{(aCosC + cCosA)}_{b} + \underbrace{(bCosC + cCosB)}_{a} + \underbrace{(aCosB + bCosA)}_{c}$

$K = a + b + c$ p: perímetro

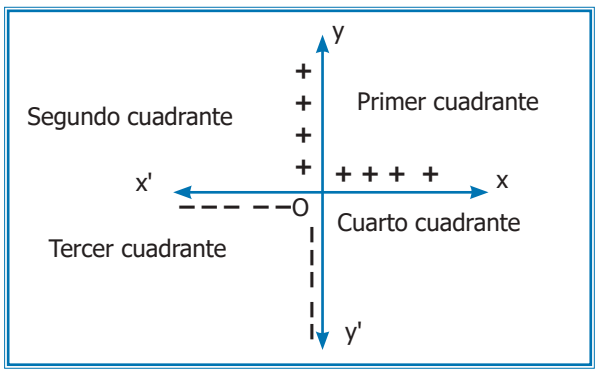
Respuesta: 2p

GEOMETRÍA ANALÍTICA - ECUACIÓN DE LA RECTA I

DESARROLLO DEL TEMA

I. CONCEPTO

Sistema formado por dos rectas numéricas que se intersectan en un punto de coordenadas (o;o), llamado origen de coordenadas y forman un ángulo recto.
Al plano que lo determina se le llama "Plano Cartesiano" en honor a René Descartes y está dividido en 4 regiones llamadas cuadrantes (C).



Donde:

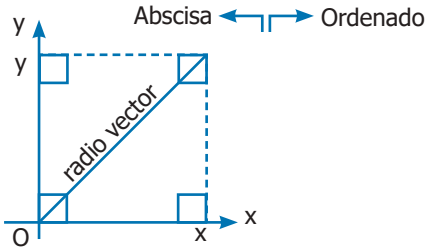
$\overleftrightarrow{x\,'x}$: Eje de los abscisas

$\overleftrightarrow{y\,'y}$: Eje de las ordenadas

O: Origen de coordenadas

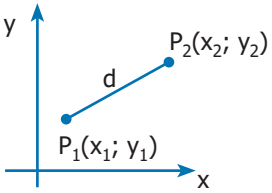
II. UBICACIÓN DE UN PUNTO

A cada punto del plano cartesiano le corresponde un par ordenado (x ; y) llamados "Coordenadas cartesianas".



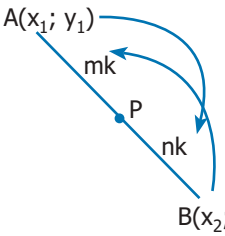
III. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean las coordenadas de dos puntos cualesquiera $P_1\,(x_1;\,y_1)$ y $P_2\,(x_2;\,y_2)$ del plano cartesiano la distancia "d" comprendida entre ellos se determinan por:



$$d = \sqrt{(x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2}$$

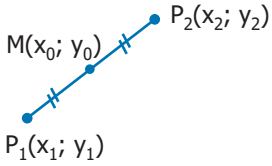
IV. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN INDICADA



$$P = \frac{nA + mB}{n + m}$$

V. COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Si $M(x_0;y_0)$ es el punto medio del segmento que tiene por extremos: $P_1\,(x_1;\,y_1)$ y $P_2\,(x_2\,;\,y_2)$. Entonces las coordenadas del punto M se determina así:

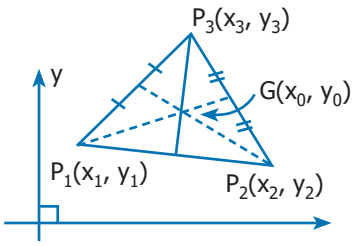


$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

VI. COORDENADAS DEL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO

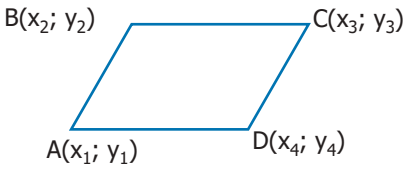
Sean $P_1(x_1; y1)$, $P_2(x_2 ; y_2)$ y $P_3(x_3; y_3)$ los vértices de un triángulo. El punto $G(x_0; y_0)$ es el baricentro de dicho triángulo.



$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_2}{3}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_2}{3}$$

VII. PROPIEDAD DEL PARALELOGRAMO

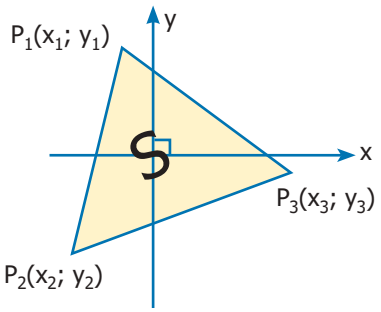


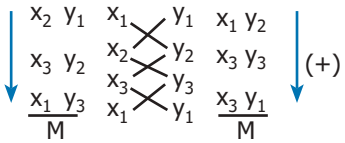
$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

VIII. ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Sean $P_1(x_1; y_1)$ $P_2(x_2; y_2)$ y $P_3(x_3; y_3)$ los vértices de un triángulo. Entonces el área S de una región triangular en función de las coordenadas de los vértices esta dado por:





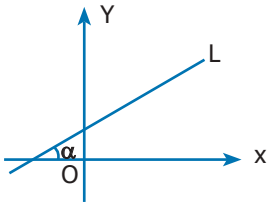
Luego:

$$S = \frac{1}{2}|M - N|$$

LA RECTA

I. ÁNGULO DE INCLINACIÓN Y PENDIENTE

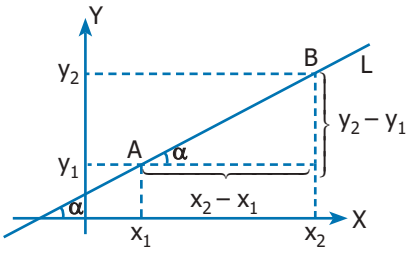
Dada un recta L al ángulo (tomado en sentido antihorario) formado por la dirección positiva del eje de abscisas y la recta se denomina ángulo de inclinación y a la tangente de dicho ángulo se le llama pendiente (m). El ángulo de inclinación α: $0° \leq \alpha < 180°$.



La pendiente: $m = Tan\alpha$

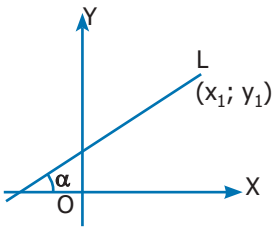
La pendiente también se puede determinar conociendo dos puntos por donde pasa la recta.
Sabemos que $m = Tan\alpha$, de la figura se deduce:

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



II. ECUACIÓN DE LA RECTA

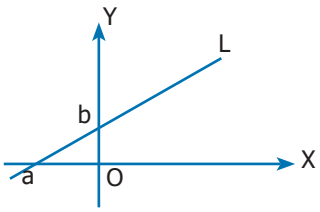
A. Conociendo un punto de la recta y su pendiente



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(Ecuación pun – pendiente)

B. Conociendo los interceptos con los ejes coordenadas



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

(Ecuación simétrica)

C. Ecuación general de la recta

La ecuación general de una recta se representa así:

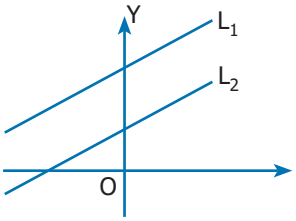
$$Ax+By+C=0 \quad A, B, C \in R$$

De esta, se deduce que la pendiente:

$$m=-\frac{A}{B};\ B\neq 0$$

D. Rectas paralelas y perpendiculares

Dada dos rectas no verticales L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si tiene igual pendiente.



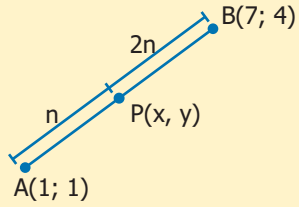
$$m_1 = m_2$$

Dadas dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo sí el producto de sus pendientes es –1.

PROBLEMAS RESUELTOS

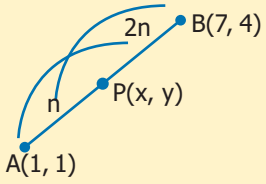
Problema 1

Determine as coordenadas del punto P.



A) (3; 2) B) (2, 1) C) (5; 2)
D) (–3; 2) E) (2; 3)

Resolución:



De la figura:

$$2A + 1 \,.\, B = (2 + 1)P$$

$$\underbrace{2(1;\ 1)}_{(2;\ 2)} + \underbrace{1(7;\ 4)}_{(7;\ 4)} = 3P$$

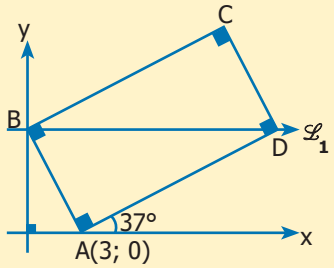
$$(9;\ 6) = 3P$$

$$(3;\ 2) = P$$

Respuesta: (3;2)

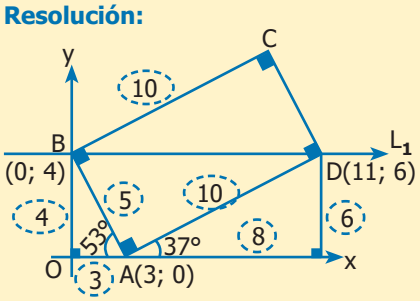
Problema 2

Calcular la pendiente de la recta $\mathscr{L}$. Si BC = 2AB.



A) 2/11 B) 3/4 C) 11/2
D) 2/7 E) 7/5

Resolución:



De la figura:

OB = 4; OA = 3M; AB = 5

Desde el punto trazamos un perpendicular al eje "x".

La recta 1 pasa por los puntos B y D.

Cálculo de pendiente.

$$m=\frac{6-4}{11-0}=\frac{2}{11}$$

Respuesta: 2/11

Problema 3

Determine el área de una región triangular limitada por los ejes cartesianos y la recta.

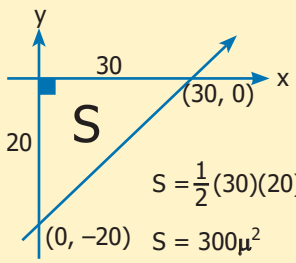
$$L = 2x - 3y - 60 = 0$$

A) $100\mu^2$ B) $200\ \mu^2$ C) $300\mu^2$
D) $400\mu^2$ E) $500\mu^2$

Resolución:

$2x - 3y - 60 = 0 \rightarrow$ Tabulando: Para x = 0

Graficando:



$$S=\frac{1}{2}(30)(20)$$

$$S = 300\mu^2$$

$$\cancel{2(0)} - 3y - 60 = 0$$

$$y = -20 \Rightarrow (0;\ -20)$$

Para y = 0

$$2x - \cancel{3(0)} - 60 = 0$$

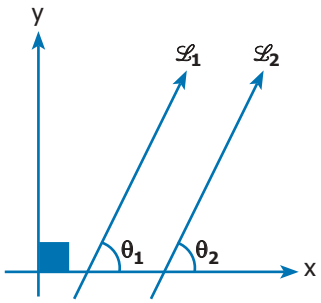
$$x = 30 \Rightarrow (30;\ 0)$$

ECUACIÓN DE LA RECTA II – ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

DESARROLLO DEL TEMA

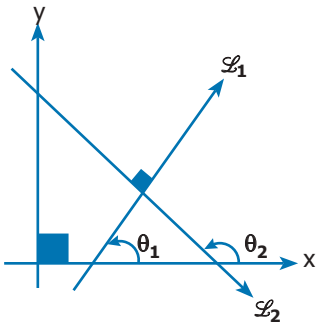
I. ECUACIÓN DE LA RECTA

A. Rectas paralelas



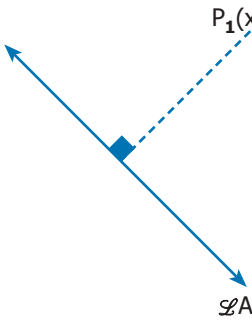
$\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 \rightarrow m_1 = m_2$

B. Rectas perpendiculares



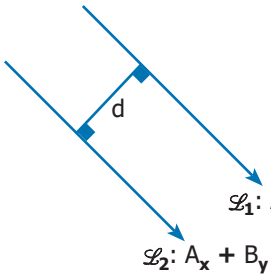
$\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \rightarrow m_1 m_2 = -1$

C. Distancia de un punto a una recta



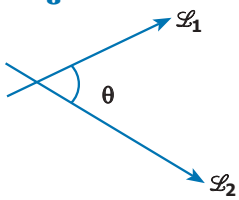
$$d(P_1\mathscr{L}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

D. Distancia entre rectas paralelas



$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

E. Ángulo entre rectas



$$\text{Tan}\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

II. CIRCUNFERENCIA

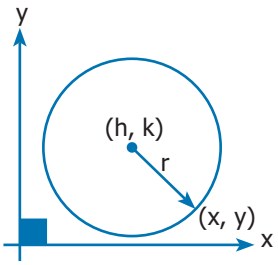
De la figura:
Centro c(h, k)

Ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$



A. Caso Particular I

Sea: h = 0 y K = 0 → C(0, 0)
Reemplazando en la ecuación ordinaria

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

La ecuación anterior de la circunferencia, se denomina "forma canónica".

B. Caso particular II

En la ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$

Si: r = 1 → $x^2 + y^2 = 1$

Ecuación de la circunferencia trigonométrica

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Las rectas:

$\mathcal{L}_1$: $3x + 2y - 1 = 0$ y

$\mathcal{L}_2$: $mx + ny + 5 = 0$

Sus perpendiculares y el punto (2, 4) pertenece a la recta $\mathcal{L}_2$. Calcule $(m + n)$.

UNMSM – 2005

A) $-5/5$ B) $-5/8$
C) $5/3$ D) $8/5$
E) $-8/5$

Resolución:

$$m_1 = -\frac{3}{2} \quad m_2 = -\frac{m}{n}$$

Teoría $m_1 m_2 = -1$ (perpendiculares)

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{m}{n}\right) = -1 \rightarrow 3m = -2n \quad \text{..... (I)}$$

Dado $(2, 4) \in \mathcal{L}_2 \rightarrow$ reemplazando

$m(2) + n(4) + 5 = 0 \rightarrow 2m + 4n + 5 = 0$ ..(II)

Resolviendo: (I) y (II)

$$\boxed{m = \frac{5}{4}} \quad \boxed{n = -\frac{15}{8}} \rightarrow m + n = -\frac{5}{8}$$

Respuesta: –5/8

Problema 2

Determine la media aritmética de las coordenadas del triángulo cuyos vértices son los centros de las circunferencias cuyas ecuaciones son:

C_1: $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$

C_3: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

UNMSM – 2013

A) 1/2 B) 1/3
C) 1/5 D) 2/3
E) 3/4

Resolución:

Expresando las ecuaciones en forma ordinaria

C_1: $(x-0)^2 + (y-2) = 1 \rightarrow$ Centro $(0,2)$

C_2: $(x+2)^2 + (y-0)^2 = 1 \rightarrow$ Centro $(-2,0)$

C_3: $(x-2)^2 + (y+0)^2 = 1 \rightarrow$ Centro $(2, 0)$

Coordenadas del baricentro:

$$G\left(\frac{0 + (-2) + 2}{3}, \frac{2 + 0 + 0}{3}\right) \rightarrow G\left(0, \frac{2}{3}\right)$$

Incógnita:

$$\text{M.A.}\left(0, \frac{2}{3}\right) = \frac{0 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Respuesta: 1/3

Problema 3

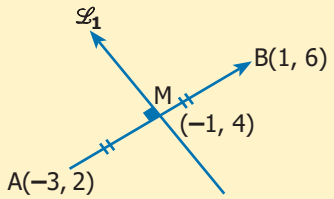
Los puntos A(–3, 2) y B(1, 6) son los extremos del segmento AB. Determine la ecuación de la mediatriz de dicho segmento.

UNMSM – 2007

A) $x + y - 3 = 0$ B) $x + y - 4 = 0$
C) $y + x - 3 = 0$ D) $x + 2y - 3 = 0$
E) $x + y - 1 = 0$

Resolución:

A(–3; 2) y B(1; 6)



M punto medio de AB.

$$M\left(\frac{-3 + 1}{2}, \frac{2 + 6}{2}\right) \rightarrow M(-1, 4)$$

Cálculo de la pendiente AB.

$$m_{AB} = \frac{6 - 2}{1 - (-3)} = 1$$

$m_1 = -1$ M(–1, 4) G(x, y)

Cálculo de (m_1)

$$m_1 = \frac{y - 4}{x - (-1)} = -1 \rightarrow y - 4 = -x - 1$$

$$x + y - 3 = 0$$

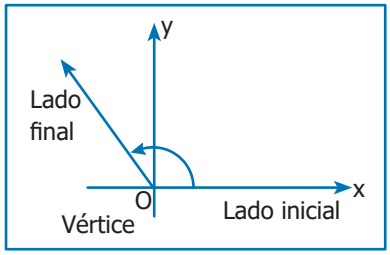
Respuesta: x + y – 3 = 0

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

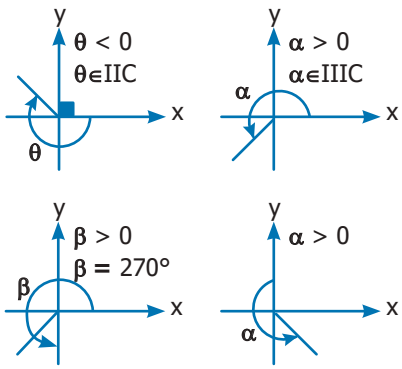
DESARROLLO DEL TEMA

I. ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Ángulo trigonométrico generado en un plano cartesiano con vértice en el origen de coordenadas y cuyo lado inicial coincide con el eje positivo de las abscisas. El lado final puede ubicarse en cualquier parte del plano cartesiano, tal como se muestra en la figura.



Ejemplos:



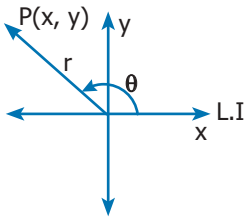
β: ángulo cuadrantal α: no está en posición normal

II. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Elementos:

x: abscisa
y: ordenada
r: radio vector

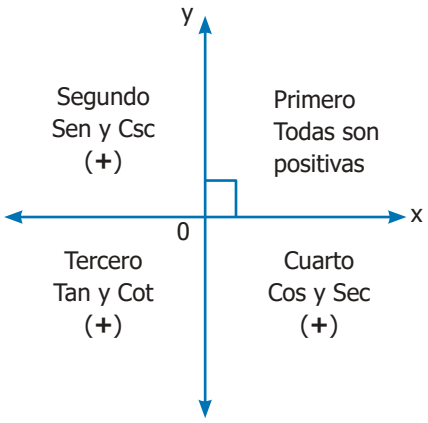
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r > 0$$



$$\text{Sen}\theta = \frac{y}{r} \rightarrow \text{Csc}\theta = \frac{r}{y}$$
$$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r} \rightarrow \text{Sec}\theta = \frac{r}{x}$$
$$\text{Tan}\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \text{Cot}\theta = \frac{x}{y}$$

III. SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUADRANTES

De acuerdo al cuadrante donde se ubica un ángulo en posición normal, las razones trigonométricas sean positivas o negativas. Ver el gráfico.



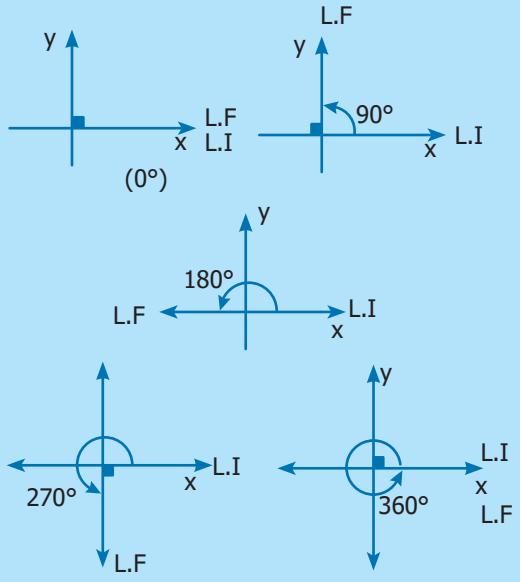
IV. ÁNGULO CUADRANTAL

Son ángulos en posición normal, en el que su lado final coincide con cualquiera de los semiejes.

Forma:

Ángulo cuadrantal = $90°n$, $n \in \mathbb{Z}$

Nota:
Los ángulos cuadrantales básicos o elementales son:

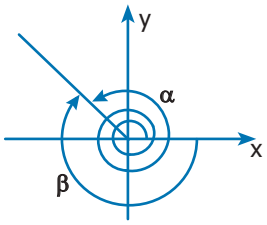


V. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

	0°	90°	180°	270°	360°
Sen	0	1	0	−1	0
Cos	1	0	−1	0	1
Tan	0	ND	0	ND	0
Cot	ND	0	ND	0	ND
Sec	1	ND	−1	ND	1
Csc	ND	1	ND	−1	ND

VI. ÁNGULOS COTERMINALES

Dos ángulos se denominan coterminales si tienen como elementos comunes el lado inicial y el lado final.



Propiedades de ángulos coterminales

Sen α, β y θ ángulos coterminales.
Se cumple:

Propiedad I

$RT(\alpha) = RT(\beta) = RT(\theta)$

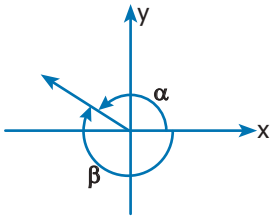
Propiedad II

$\alpha - \beta = 360°K$ | $\alpha - \theta = 360°\ m$

$\beta - \theta = 360°\ n$

k, m, n, $\in \mathbb{Z}$

Ejemplo:



$R.T.(\alpha) = RT(\beta)$ ∧ $\alpha - \beta = 360°$

Observaciones:

- $a > 0 \rightarrow -a < 0$
- $a < 0 \rightarrow -a > 0$

Valor Absoluto

$|a| = a\ ;\ a \geq 0$

$|a| = -a;\ a < 0$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$|a - b| = |b - a|$

$|a|^2 = |a^2| = a^2$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

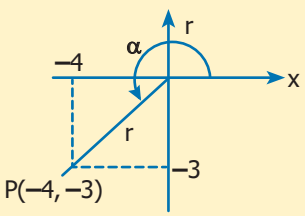
Se tiene un ángulo α en posición normal. Si su lado final tiene al punto (−4, −3), calcule Secα . Cotα.

A) 3/5 B) −5/4 C) −3/5
D) 5/3 E) −5/3

UNMSM – 2006 – II

Resolución:

Del enunciado se tiene:



Calculamos r $\quad r = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$
$r = 5$

Tenemos: $\quad E = Sec\alpha \cdot Cot\alpha$
$E = \left(\frac{r}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right)$

Resoluciones:
$E = \left(\frac{5}{-4}\right)\left(\frac{-4}{-3}\right) \rightarrow \therefore E = \frac{-5}{3}$

Respuesta: −5/3

Problema 2

Si α, ϕ, θ son ángulos agudos, tales que:

$\frac{\alpha}{4}=\frac{\phi}{5}=\frac{\phi}{6}$ y $\text{Sen}(\alpha+\phi+\theta)=1$

Halle $\text{Tan}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$

UNMSM – 2009 – II

A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

Resolución:

Recordar de ángulos cuadrantales:

Si $\text{Sen}\omega = 1$ y $0 < \omega < 360°$

entonces $\omega = 90°$

Entonces:

$\frac{\alpha}{4}=\frac{\phi}{5}=\frac{\theta}{6}=k \longrightarrow \alpha = 4k,\ \phi = 5k,$

$\theta = 6k$

$0 < \alpha + \phi + \theta < 270°$

De lo cual:

$\text{Sen}(4k + 5k + 6k) = 1$ por dato

$\text{Sen}(15k) = 1;\ 15k = 90°$

$k = 6°$

Piden:

$\text{Tan}\left(\frac{4k + 6k}{2}\right) = \text{Tan}(5k) = \text{Tan}30°$

$\therefore \text{Tan}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Respuesta: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Problema 3

Si $\sqrt{|1-3\text{Sec}\alpha|}=2$,

además $|\text{Tan}\alpha| = -\text{Tan}\alpha$

A) 9/20 B) –52/7 C) –9/20

D) –41/20 E) 41/20

Resolución:

$\sqrt{|(1-3\text{Sec}\alpha)|}=2 \ldots (\ )^2$

$|1-3\text{Sec}\alpha| = 4$

$1-3\text{Sec}\theta = -4 \quad \vee \quad 1-3\text{Sec}\alpha = 4$

$\text{Sec}\alpha = \frac{5}{3} \quad \vee \quad \text{Sec}\alpha = -1$

α: cuadrantral

como $|\text{Tan}\alpha| = -\text{Tan}\alpha \rightarrow \text{Tan}\alpha < 0$

$\alpha \in \text{IIC} \quad \vee \quad \alpha \in \text{IVC}$

Solo es posible: $\text{Sec}\alpha = \frac{5}{3}; \alpha \in \text{IVC}$

Luego: $\text{Sen}\alpha + \text{Csc}\alpha = -\frac{4}{5}+\frac{5}{-4}$

$\therefore \text{Sen}\alpha + \text{Csc}\alpha = -\frac{41}{20}$

Respuesta: ***–41/20***

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

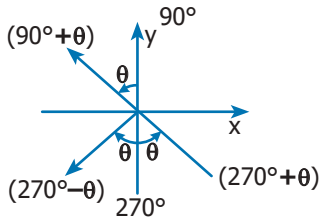
DESARROLLO DEL TEMA

Reducir un ángulo al primer cuadrante consiste en relacionar a las razones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud con las razones trigonométricas de un ángulo agudo (ángulo del primer cuadrante), obteniéndose una equivalencia. Se presentan los siguientes casos:

I. PRIMER CASO

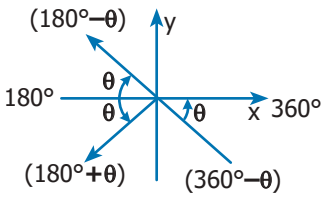
Para ángulos positivos menores que una vuelta.

A. Primera forma



$$R.T.(90° + \theta) = \pm CO - R.T.(\theta)$$
$$R.T.(270° \pm \theta) = \pm CO - R.T.(\theta)$$

B. Segunda forma



$$R.T.(180° \pm \theta) = \pm R.T.(\theta)$$
$$R.T.(360° - \theta) = \pm R.T.(\theta)$$

Nota:
El signo (±) dependerá del cuadrante donde se ubica el ángulo y también de la razón trigonométrica original.

II. SEGUNDO CASO

Para ángulos positivos mayores que una vuelta. Para reducir estos ángulos al primer cuadrante, se les debe descomponer en función al número entero de vueltas que contenga este ángulo.

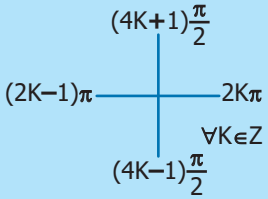
$$R.T.(360°K + \alpha) = R.T.(\alpha)$$
$$R.T.(2k\pi + \alpha) = R.T.(\alpha)$$

$K \in Z$

$0 < \alpha < 360°$

Observación:

La notación general de ángulos cuadrantales es:



III. TERCER CASO

Para ángulos negativos.

Se demuestra que las funciones coseno y secante cuyos ángulos son negativos, éstos van a ser igual a los ángulos positivos; las demás R.T., el signo sale fuera del ángulo y afecta a toda la R.T.

$$Sen(-\theta) = -Sen\theta$$
$$Cos(-\theta) = Cos\theta$$
$$Tan(-\theta) = -Tan\theta$$
$$Cot(-\theta) = -Cot\theta$$
$$Sec(-\theta) = Sec\theta$$
$$Csc(-\theta) = -Csc\theta$$

IV. PROPIEDADES PARA ÁNGULOS RELACIONADOS

Para ángulos negativos.

Se demuestra que las funciones coseno y secante cuyos ángulos son negativos, éstos van a ser igual a los ángulos positivos; las demás R.T., el signo sale fuera del ángulo y afecta a toda la R.T.

Si: $\alpha + \beta = 180° <> \pi$

$\cos\alpha + \cos\beta = 0$
$\tan\alpha + \tan\beta = 0$
$\cot\alpha + \cot\beta = 0$
$\sec\alpha + \sec\beta = 0$
$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$
$\csc\alpha = \csc\beta$

Si: $\alpha + \beta = 360° <> 2\pi$

$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 0$
$\tan\alpha + \tan\beta = 0$
$\cot\alpha + \cot\beta = 0$
$\csc\alpha + \csc\beta = 0$
$\cos\alpha = \cos\beta$
$\sec\alpha = \sec\beta$

Nota:

Es importante tener presente:

$\theta > 0 \rightarrow -\theta < 0$

$\theta < 0 \rightarrow -\theta > 0$

Nota:

$\operatorname{Sen}(x-y) = -\operatorname{Sen}(y-x)$

$\cos(x-y) = \cos(y-x)$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Simplificar:

$$A = \frac{\tan(180° + x)}{\cot(90° - x)} + \frac{\operatorname{Sen}(270° + x)}{\cos(180° - x)}$$

A) 3 B) 2 C) 4
D) 1 E) 6

Resolución:

Aplicando las fórmulas de reducción al primer cuadrante en cada término.

$\tan(180° + x) = +\tan x$

$\cot(90° - x) = +\tan x$

$\operatorname{Sen}(270° + x) = -\cos x$

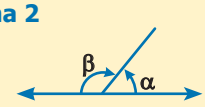
$\cos(180° - x) = -\cos x$

Reemplazando:

$$A = \frac{(\tan x)}{(\tan x)} + \frac{(-\cos x)}{(-\cos x)} \rightarrow A = 2$$

Respuesta: B) 2

Problema 2



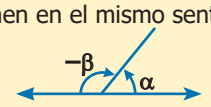
De la figura, calcular:

$K = \operatorname{Sen}a + \operatorname{Sen}\beta + \cos\alpha + \cos\beta$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 3

Resolución:

Debemos tener presente que solo se pueden sumar medidas angulares, si estas tienen en el mismo sentido.



De la figura:

$\alpha + (-\beta) = 180°$

$\alpha - \beta = 180° \rightarrow \alpha = 180° + \beta$

Reemplazando

$K = \operatorname{Sen}(180° + \beta) + \operatorname{Sen}\beta + \cos(180° + \beta) + \cos\beta$

Por fórmula de reducción al primer cuadrante.

$K = (-\operatorname{Sen}\beta) + \operatorname{Sen}\beta + (-\cos\beta) + \cos\beta$

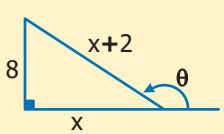
$K = 0$

Respuesta: A) 0

Problema 3

De la figura, calcular:

$M = 5\sec\theta + \sec 53$



A) 5 B) 4 C) −4
D) 2 E) 8

Resolución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular (x).

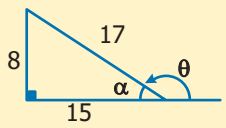
$8^2 + x^2 = (x + 2)^2$

Operando adecuadamente:

$64 + x^2 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow 4x = 60°$

$x = 15$

Reemplazando:



De la figura:

$\alpha + \theta = 180°$

Se cumple:

$\sec\alpha + \sec\theta = 0$

Reemplazando:

$$\frac{17}{15} + \sec\theta = 0 \rightarrow \sec\theta = \frac{-17}{15}$$

Reemplazando en la incógnita:

$$M = 5\left(-\frac{17}{15}\right) + \frac{5}{3} = -\frac{17}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{12}{3}$$

$M = -4$

Respuesta: C) −4

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

DESARROLLO DEL TEMA

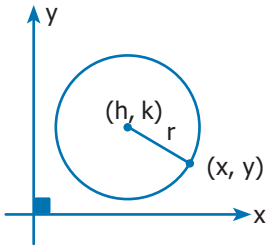
I. CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que equidistan con respecto a un punto fijo llamado centro.

La distancia constante se denomina radio.

De la figura:

Centro c(h, K)



Ecuación ordinaria

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

A. Caso particular (I)

Sea: $h = 0$ y $K = 0 \rightarrow C(0, 0)$

Reemplazando en la ecuación ordinaria

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

La ecuación anterior de la circunferencia, se denomina "forma canónica".

B. Caso particular (II)

En la ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$

Si: $r = 1 \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 1}$

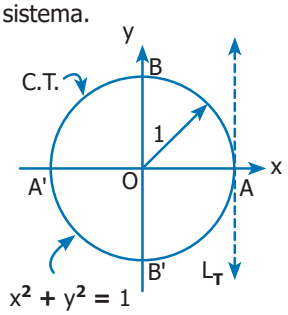
Esta es la ecuación de la circunferencia trigonométrica.

II. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Es aquel conjunto de infinitos puntos que pertenecen al plano cartesiano cuya distancia al origen de coordenadas es igual a la unidad de dicho sistema.

Donde:

- O (0; 0): origen de coordenadas
- A (1; 0): origen de arcos
- B (0; 1): origen de complementos
- A' (−1; 0): origen de suplementos
- L_T: eje de tangentes

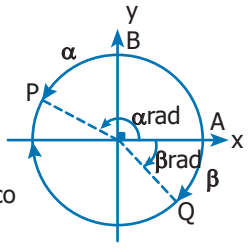


III. ARCOS DIRIGIDOS EN POSICIÓN NORMAL

- **Definición**

Son aquellos arcos formados en la C.T. que se generan a partir del origen de arcos (posición inicial: A) y cuyo extremo (P) será la posición final de dicho arco. Diremos que un arco pertenece a un determinado cuadrante, si su extremo pertenece a dicho cuadrante. Por ejemplo a y b son arcos dirigidos en posición normal.

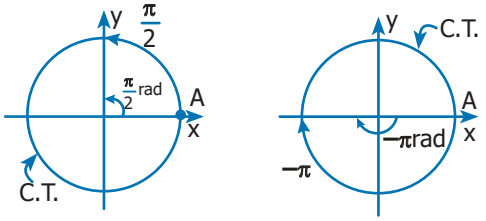
- P: extremo del arco "α", $\alpha \in II$; es un arco positivo (sentido antihorario)
- Q: extremo del arco "β", $\beta \in IVC$; β es un arco negativo (sentido horario)



IV. ARCO CUADRANTAL

Denominaremos de esta manera a aquellos arcos dirigidos en posición normal, cuyo extremo coincida con alguno de los puntos de intersección de los ejes con la C.T. (A, B, A', B').

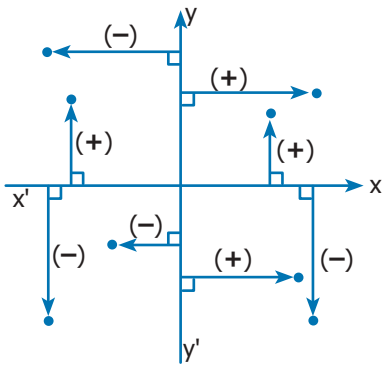
Por ejemplo:



V. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA C.T.

Las razones trigonométricas serán representadas a partir de segmentos dirigidos los cuales brindarán la siguiente información:

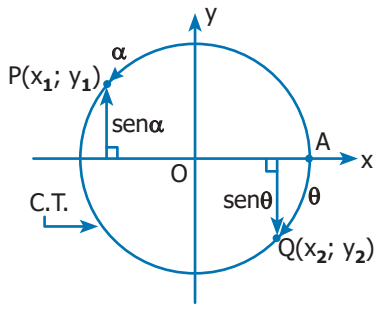
1. La longitud del segmento, indicará la magnitud de la razón.
2. El sentido del segmento, indicará el signo de la razón. Los signos de dichos segmentos se regirán bajo el siguiente convenio de signos:
   - Los segmentos rectilíneos horizontales hacia la derecha de X'X son positivos y hacia la izquierda de XX' son negativos.
   - Los segmentos rectilíneos verticales hacia arriba de Y'Y son positivos y hacia abajo de YY' son negativos.



VI. DEFINICIONES

A. Seno

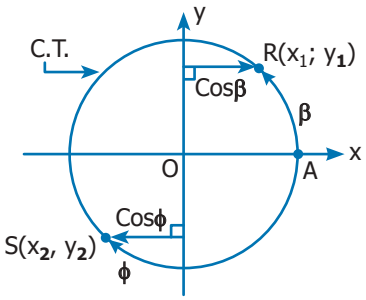
El **seno** de un arco en la C.T. se representa mediante la **ordenada** del extremo del arco:



Entonces: $\text{Sen}\alpha = y_1$
$\text{Sen}\theta = y_2$

B. Coseno

El **coseno** de un arco en la C.T. es la abscisa del **extremo** del arco:



Entonces: $\text{Cos}\beta = x_1$; $\text{Cos}\phi = x_2$

Variación Analítica

I. Cuadrante
$\text{Sen}0 = 0$
$\text{Sen}\frac{\pi}{2} = 1$ } Creciente

II. Cuadrante
$\text{Sen}\frac{\pi}{2} = 1$
$\text{Sen}\pi = 0$ } Decreciente

III. Cuadrante
$\text{Sen}\pi = 0$
$\text{Sen}\frac{3\pi}{2} = -1$ } decreciente

IV. Cuadrante
$\text{Sen}\frac{3\pi}{2} = -1$
$\text{Sen}2\pi = 0$ } creciente

Análogamente

I. Cuadrante
$\text{Cos}\ 0 = 1$
$\text{Cos}\ \frac{\pi}{2} = 0$ } decreciente

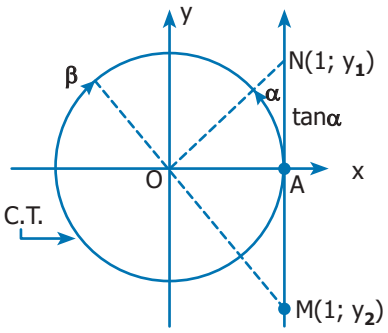
II. Cuadrante
$\text{Cos}\ \frac{\pi}{2} = 0$
$\text{Cos}\pi = -1$ } decreciente

III. Cuadrante
$\text{Cos}\pi = -1$
$\text{Cos}\ \frac{3\pi}{2} = 0$ } creciente

IV. Cuadrante
$\text{Cos}\ \frac{3\pi}{2} = 0$
$\text{Cos}2\pi = 1$ } creciente

C. Tangente

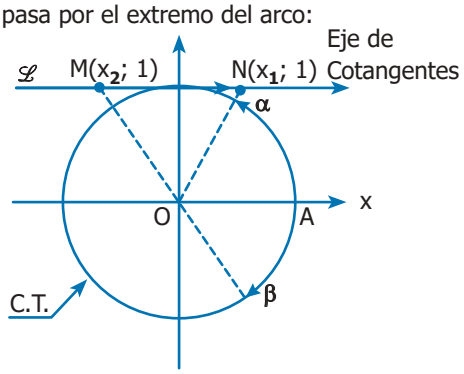
La tangente de un arco en la C.T. es la ordenada del punto de intersección, entre el eje de tangente y la prolongación del radio que contiene al extremo del arco:



Entonces: $\text{Tan}\alpha = y_1$
$\text{Tan}\beta = y_2$

D. Cotangente

La cotangente de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de complementos y la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco:



Entonces: $Ctg\alpha = x_1$; $Ctg\beta = x_2$

Variación Analítica

I. Cuadrante

$Tan0 = 0$

$x \to \frac{\pi}{2}$ Creciente

$Tanx \to \infty$

II. Cuadrante

$x \to \frac{\pi}{2}$

$Tanx \to -\infty$

Creciente

$Tan\pi = 0$

III. Cuadrante

$Tan\pi = 0$

$x \to \frac{3\pi}{2}$ Creciente

$Tax \to +\infty$

IV. Cuadrante

$x \to \frac{3\pi}{2}$

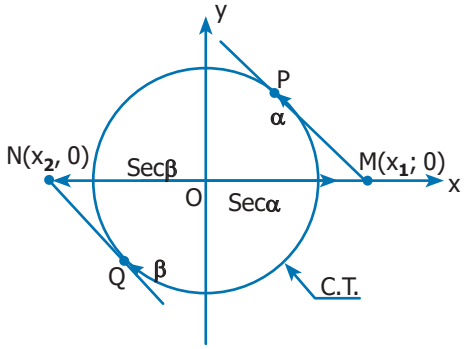
$Tanx \to -\infty$

Creciente

$Tan2\pi = 0$

E. Secante

La secante de un arco es la abcisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje x.



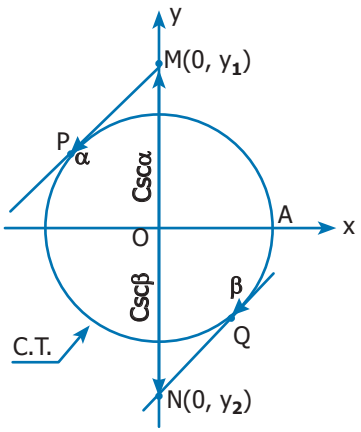
P y Q: puntos de tangencia

Entonces: $Sec\alpha = x_1$

$Sec\beta = x_2$

F. Cosecante

La cosecante de un arco es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje y.



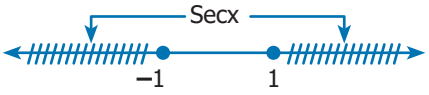
P y Q: puntos de tangencia

Entonces: $Csc\alpha = y_1$

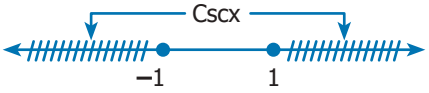
$Csc\beta = y_2$

Variación Analítica

- $1 \le Secx \vee Secx \le -1, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z\right\}$



- $1 \le Cscx \vee Cscx \le -1, \forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in Z\}$



Es importante tener presente que:

- En forma práctica la línea seno es una **vertical** en la C.T. y la línea coseno es una **horizontal**.
- $-1 \le Sen\theta^{Impar} \le 1$; $-1 \le Cos\theta^{Impar} \le 1$

  $0 \le Sen\theta^{Par} \le 1$; $0 \le Cos\theta^{Par} \le 1$

  Si nos indican el cuadrante, el intervalo será ABIERTO.
- En toda circunferencia trigonométrica el arco (expresado en unidades de longitud) es numéricamente igual al ángulo que subtiende dicho arco, expresado en radianes.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Hallar $F_{max} - F_{min}$, si:

$$F = 2\text{sen}\alpha - 3\text{vers}\theta + 4\text{cov}\phi$$

A) 18 B) 16 C) 15
D) 14 E) 12

UNMSM 2002–I
NIVEL FÁCIL

Resolución:

Se sabe que: $-1 \le \text{sen}\alpha \le 1$
$0 \le \text{vers}\theta \le 2$
$0 \le \cos\phi \le 2$

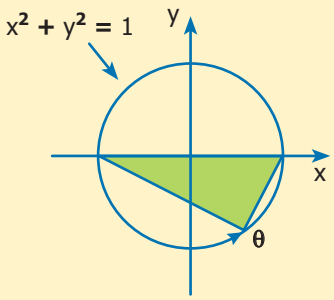
luego:

$F_{max} = 2(1) - 3(0) + 4(2) = 10$
$F_{max} = 2(-1) - 3(2) + 4(0) = -8$

Respuesta: A) 18

Problema 2

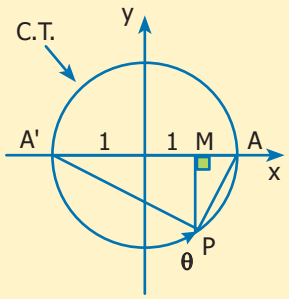
Determine el área de la región sombreada



A) Tanθ B) Senα C) −Senθ
D) Senθ E) −Senα

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



Analizando el gráfico:
Base: A´A = 2

Altura:

Sabemos: $\boxed{S = \frac{1}{2}bh}$ (I)

Sabemos: $|a| = -a,\ a < 0$

Para la altura $\theta \in$ IVC,

$PM = |\text{sen}\theta| = -\text{sen}\theta$

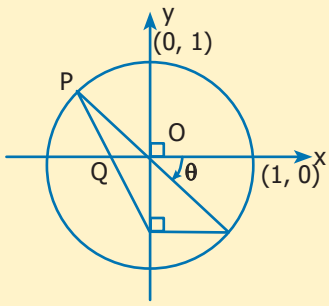
Reemplazando en (I)

$S = \frac{1}{2}(2)(-\text{Sen}\theta) \rightarrow S = -\text{Sen}\theta$

Respuesta: C) −Senθ

Problema 3

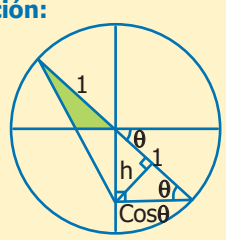
En la figura mostrada, halle el área de la región triangular OQP.



A) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{4}$ B) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{8}$
C) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{16}$ D) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{2}$
E) $-\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta$

UNMSM 2001–I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



Del gráfico: $h = \cos\theta|\text{sen}\theta|$

Luego:

$$A = \frac{1}{4}\left[\frac{-2(\text{Cos}\theta\ \text{Sen}\theta)}{2}\right]$$

$$A = -\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{4}$$

Respuesta: A) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{4}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS SIMPLES

DESARROLLO DEL TEMA

Es una igualdad establecida entre expresiones que involucran razones trigonométricas de una o más variables, las cuales se verifican para todo valor admisible de dichas variables.

Ejemplo:

La igualdad: $Sen^2x + Cos^2x = 1$, se verifica para cualquier valor real que le asignemos a la variable por consiguiente:

$\boxed{Sen^2x + Cos^2x = 1}$ Es una identidad $\forall\ x \in \mathbb{R}$

I. CLASIFICACIÓN DE LAS IDENTIDADES FUNDAMENTALES

A. Identidades pitagóricas

1. $\boxed{Sen^2x + Cos^2x = 1}$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$

- $Sen^2x = 1 - Cos^2x$
- $Cos^2x = 1 - Sen^2x$

2. $\boxed{1 + Tan^2x = Sec^2x}$ $\forall\ x \neq (k + 1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

- $Tan^2x = Sec^2x - 1$
- $1 = Sec^2x - Tan^2x$

3. $\boxed{1 + Cot^2x = Csc^2x}$ $\forall\ x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

- $Cot^2x = Csc^2x - 1$
- $1 = Csc^2x - Cot^2x$

B. Identidades reciprocas

1. $\boxed{Senx\ Cscx = 1}$

- $Senx = \frac{1}{Cscx}$
- $Cscx = \frac{1}{Senx}$

2. $\boxed{Cosx\ Secx = 1}$

- $Cosx = \frac{1}{Secx}$
- $Secx = \frac{1}{Cosx}$

3. $\boxed{Tanx\ Cosx = 1}$

- $Tanx = \frac{1}{Cotx}$
- $Cotx = \frac{1}{Tanx}$

C. Identidades por división

$$\boxed{\begin{array}{l} Tanx = \dfrac{Senx}{Cosx} \\ Cotx = \dfrac{Cosx}{Senx} \end{array}}$$

D. Identidades auxiliares

1. $Sen^4x + Cos^4x = 1 - 2Sen^2xCos^2x$
2. $Sec^4x + Tan^4x = 1 + 2Sec^2xTan^2x$
3. $Csc^4x + Cot^4x = 1 + 2Csc^2xCot^2x$
4. $Sen^6x + Cos^6x = 1 - 3Sen^2xCos^2x$
5. $Sec^6x - Tan^6x = 1 + 3Sec^2xTan^2x$
6. $Csc^6x - Cot^6x = 1 + 3Csc^2xCos^2x$
7. $Tanx + Cotx = SecxCscx$
8. $Tanx + Cotx = \frac{1}{SenxCosx}$
9. $(Senx + Cosx)^2 = 1 + 2SenxCosx$
10. $(1 + Senx + Cosx)^2 = 2(1 + Senx)(1 + Cosx)$
11. $\frac{Senx}{1 \pm Cosx} = \frac{1 \mp Cosx}{Senx}$
12. $\frac{Cosx}{1 \pm Senx} = \frac{1 \mp Senx}{Cosx}$
13. $\frac{1}{Secx \pm Tanx} = Secx \mp Tanx$
14. $\frac{1}{Cscx \pm Cotx} = Cscx \mp Cotx$
15. $Sec^2xCsc^2x = Sec^2x + Csc^2x$

II. FUNCIONES AUXILIARES

Senoverso = $Ver(\theta) = 1 - Cos\theta$

Cosenoverso = $Cov(\theta) = 1 - Sen\theta$

Ex Secante = $Ex\ Sec(\theta) = Sec\theta - 1$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si $(\alpha) \in$ III c, simplifique

$$A = Cot^2\alpha + Csc\alpha\left(\sqrt{\frac{Csc^2\alpha(Csc^2\alpha + Sec^2\alpha)}{(Tan\alpha + Cot\alpha)^2}}\right)$$

A) -1 B) $1/2$ C) $3/2$
D) $-1/2$ E) 1

PRE-SAN MARCOS 2011
NIVEL FÁCIL

Resolución:

Sabemos $\dfrac{Sec^2\alpha + Csc^2\alpha = Sec^2\alpha Csc^2\alpha}{Tan\alpha + Cot\alpha = Sec\alpha Csc\alpha}$

Para el problema

$$A = Cot^2\alpha + Csc\alpha\sqrt{\frac{Csc^2\alpha(Sec^2\alpha + Csc^2\alpha)}{Sec^2\alpha Csc^2\alpha}}$$

$$A = Cot^2\alpha + Csc\alpha|Csc\alpha| = Cot^2\alpha - Csc^2\alpha \quad (-)$$

$\Rightarrow \quad A = -1$

Respuesta: -1

Problema 2

Si $Cos\alpha = \dfrac{m}{n}$, donde $|m| \neq |n|$

Calcule $k = (Cot\alpha + Csc\alpha)(Tan\alpha - Sen\alpha)$

A) $\dfrac{n^2}{m^2} - 1$ B) $\dfrac{m^2}{n^2} - 1$
C) $\dfrac{m^2 - 1}{mn}$ D) $\dfrac{m^2 - n^2}{mn}$
E) $\dfrac{n^2 - m^2}{mn}$

UNMSM 2012
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Efectuando operaciones

$k = (Cot\alpha + Csc\alpha)(Tan\alpha - Sen\alpha)$

$k = Cot\alpha Tan\alpha - Cot\alpha Sen\alpha + Csc\alpha Tan\alpha - Sen\alpha Csc\alpha$

Simplificando identidades

$$k = 1 - \left(\frac{Cos\alpha}{Sen\alpha}\right)Sen\alpha + \left(\frac{1}{Sen\alpha}\right)\left(\frac{Sen\alpha}{Cos\alpha}\right) - 1$$

$$k = Sec\alpha - Cos\alpha = \frac{n}{m} - \frac{m}{n} \rightarrow k = \frac{n^2 - m^2}{mn}$$

Respuesta: $\dfrac{n^2 - m^2}{mn}$

Problema 3

Sabiendo $Cos\alpha = m$ y $3Sen^2\alpha = t$

Calcula $K = 4m^2 + 4/3t + 7$

A) 7 B) 8 C) 1
D) 4 E) 3

UNMSM 2013
NIVEL DIFÍCIL

Resolución:

Reemplazando los datos en ña incógnita

$k = 4Cos^2\alpha + 4/3(3Sen^2\alpha) + 7$

Simplificando y factorizando

$k = 4(Cos^2\alpha + Sen^2\alpha) + 7 \rightarrow k = 1$

Respuesta: 1

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ARCOS COMPUESTOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA LA SUMA DE DOS ARCOS

Estas igualdades se verifican para todos los valores admisibles de sus variables y son las siguientes:

$\text{Sen}(x + y) = \text{Sen}x\text{Cos}y + \text{Cos}x\text{Sen}y$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$
$\text{Cos}(x + y) = \text{Cos}x\text{Cos}xy - \text{Sen}x\,\text{Sen}y$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$
$\text{Tan}(x + y) = \dfrac{\text{Tan}x + \text{Tan}y}{1 - \text{Tan}x\text{Tan}y}$ $\forall\ x, y, (x + y) \neq (2k + 1)\,\pi/2;\ K \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

Calcule el valor de Sen75°

Resolución

Expresamos nuestra variable que es "75°" en función de ángulos conocidos por ejemplo "45° + 30°", para luego aplicar las identidades de la suma de ángulos

- $\text{Sen}75° = \text{Sen}(45° + 30°) = \text{Sen}45°\text{Cos}30° + \text{Sen}30°\text{Cos}45°$

$$\text{Sen}75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sen}75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

II. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA LA DIFERENCIA DE DOS ARCOS

Estas igualdades se verifican para todos los valores admisibles de sus variables y son las siguientes:

$\text{Sen}(x - y) = \text{Sen}x\text{Cos}y - \text{Cos}x\,\text{Sen}y$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$
$\text{Cos}(x - y) = \text{Cos}x\text{Cos}y + \text{Sen}x\,\text{Sen}y$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$
$\text{Tan}(x - y) = \dfrac{\text{Tan}x - \text{Tan}y}{1 + \text{Tan}x\text{Tan}y}$ $\forall\ x, y, (x - y) \neq (2k + 1)\,\pi/2;\ K \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

Calcule el valor de Tan8°

Resolución:

Expresaremos nuestra variable 8° en función de ángulos conocidos.

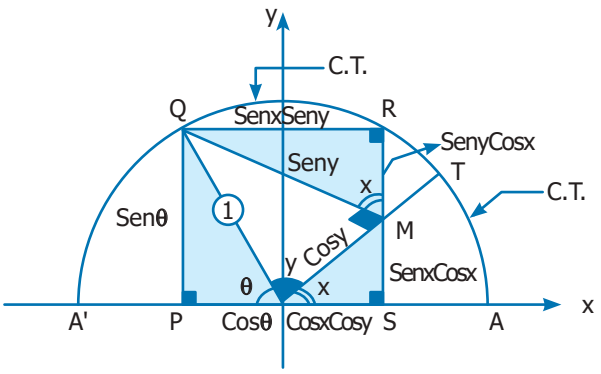
- $\text{Tan}8° = \text{Tan}(45° - 37°) = \dfrac{\text{Tan}45° - \text{Tan}37°}{1 + \text{Tan}45° \times \text{Tan}37°}$

$$\text{Tan}8° = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}$$

$$\text{Tan}8° = \frac{1}{7}$$

III. DEMOSTRACIÓN DEL SENO Y COSENO DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Del siguiente gráfico:



En el gráfico se observa que $\theta \wedge (y + x)$ son suplementarios

$\rightarrow Sen\theta = Sen(y + x)$

$\rightarrow Cos\theta = -Cos(x + y)$

Ademas $QP = RS$

$Sen\theta = SenxCosy + SenyCosx$

$$\therefore Sen(x + y) = SenxCosy + SenyCosx$$

También: $PS = QR$

$Cos\theta + CosxCosy = SenxSeny$

$Cos\theta = SenxSeny - CosxCosy$

$-Cos(x + y) - CosxCosy$

$$\therefore Cos(x + y) = CosxCosy - SenxSeny$$

IV. IDENTIDADES AUXILIARES

$$\frac{Sen(x \pm y)}{CosxCosy} = Tanx \pm Tany$$

$$Sen(x + y)Sen(x - y) = Sen^2x - Sen^2y$$
$$Sen(x + y)Sen(x - y) = Cos^2y - Cos^2x$$

$$Cos(x + y)Cos(x - y) = Cos^2x - Sen^2y$$

$$Tan(x \pm y) = Tanx \pm Tany \pm TanxTanyTan(x \pm y)$$

Observación:

Si : $\alpha \pm \beta = 45° <> \frac{\pi}{4}$

$Tan\alpha \pm Tan\beta \pm Tan\alpha Tan\beta = 1$

Importante:

$f(x) = aSenx \pm bCosx;\ x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(x) \leq +\sqrt{a^2 + b^2}$$

V. PROPIEDADES PARA TRES ÁNGULOS

Estas propiedades se cumplen siempre que los tres ángulos estén relacionados bajo una condición

1. Siendo:

$x + y + z = \pi$ ó $k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$Tanx + Tany + Tanz = TanxTanyTanz$$
$$CotxCoty + CotxCotz + CotyCotz = 1$$

$\forall x, y, z \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

$\forall x, y, z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

2. Siendo:

$x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ó $(2k + 1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

$$Cotx + Coty + Cotz = CotxCotyCotz$$
$$TanxTany + TanxTanz + TanyTanz = 1$$

$\forall x, y, z \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}$

$\forall x, y, z \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Indique la expresión equivalente a

$$E = Cos\left(-\frac{\pi}{6} - x\right) + Cosx\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + Cosx, \ ]0; \frac{\pi}{2}[$$

A) $\sqrt{3}Cosx$
B) $2\sqrt{3}Cosx$
C) $(\sqrt{3}+3)Cosx$
D) $(\sqrt{3}+1)Cosx$
E) $(2+\sqrt{3})Cosx$

UNMSM 2014–II

Resolución:

Planteamiento

Sabemos:

$Cos(x \pm y) = Cosx.Cosy \pm Senx.Seny$
$Cos(-A - B) = Cos(A + B)$

Desarrollando las formulas:

$$E = Cos\frac{\pi}{6}.Cosx - Sen\frac{\pi}{6}Senx + Cosx.Cos\frac{\pi}{6} + Senx.Sen\frac{\pi}{6} + Cosx$$

$$E = 2Cos\frac{\pi}{6}Cosx + Cosx$$

$$E = \sqrt{3}Cosx + Cosx$$

$$E = (\sqrt{3}+1)Cosx$$

Respuesta: D

Problema 2

Si: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, halle $(1 - cot\alpha)(1 - cot\beta)$

A) 2/3
B) $3\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}/2$
D) $2\sqrt{3}$
E) 2

UNMSM 2014–II

Resolución:

Inicialmente ubicamos la propiedad

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \rightarrow Tan\alpha + Tan\beta + Tan\alpha.Tan\beta = 1$$

En base a esta propiedad, se procederá a indicar la forma de la incógnita.

$Tan\alpha + Tan\beta + Tan\alpha.Tan\beta = 1$

Dividiendo miembro a miembro por " $Tan\alpha.Tan\beta$"

$Cot\beta + Cot\alpha + 1 = Cot\alpha.Cot\beta$

Trasponiendo

$(Cot\beta - Cot\alpha.Cot\beta) - (Cot\alpha - 1) + 1 = -1$

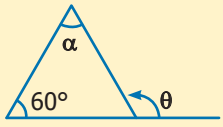
Factorizando:

$Cot\beta(1 - Cot\alpha) - (Cot\alpha - 1) = 2$

Respuesta: E

Problema 3

En la figura, $Tan\alpha = 2\sqrt{3}$



A) $-5/\sqrt{3}$
B) $-7\sqrt{3}/9$
C) $-7/2\sqrt{3}$
D) $-5\sqrt{3}/9$
E) $-4\sqrt{3}/9$

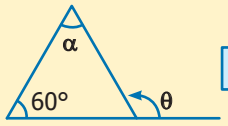
UNMSM 2014–II

Resolución:

Planteamiento

- Ángulos compuestos
- Se observa teoría de ángulo exterior

Operación del problema:



$Tan\alpha = 2\sqrt{3}$

Ángulo exterior

$\theta = (60° + a)$
$Cot\alpha = Cot(60° + a)$

Desarrollando

$$Cot\theta = \frac{1 - (\sqrt{3})(2\sqrt{3})}{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}$$

$$Cot\theta = \frac{-5\sqrt{3}}{9}$$

Respuesta: D

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA ARCO MÚLTIPLE I

DESARROLLO DEL TEMA

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA ARCO DOBLE

El objeto de estas igualdades es expresar las razones trigonométricas del ángulo doble en términos de las razones trigonométricas del ángulo simple ; estas igualdades serán válidas para todos los valores admisibles de sus variables.

I. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\text{Sen}x = 2\text{Sen}x\text{Cos}x$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$$

$\forall\ x \neq \{(2n+1)\frac{\pi}{4}; (2n+1)\frac{\pi}{2}\};\ n \in \mathbb{Z}$

Observación:

Con la ayuda de la identidad sen2x + cos2x = 1, se puede expresar el coseno del ángulo doble (cos2x), ya sea en función del seno o coseno del ángulo simple (senx o cosx) para lo cual procederemos del modo siguiente:

Sabemos que:

$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x = 1$

Pero:

$\text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x$

$\Rightarrow \text{Cos}2x = (1 - \text{Sen}^2x) - \text{Sen}^2x$

$\therefore \text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$

Sabemos que:

$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

Pero:

$\text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}^2x$

$\Rightarrow \text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - (1 - \text{Cos}^2x)$

$\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$

II. IDENTIDADES AUXILIARES

$$1 + \text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x$$

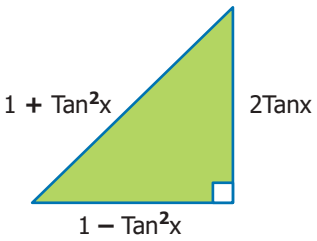
$$1 - \text{Cos}2x = 2\text{Sen}^2x$$

$$\text{Cot}x - \text{Tan}x = 2\text{Cot}.2x$$

$$\text{Cot}x + \text{Tan}x = 2\text{Csc}2x$$

III. ÁNGULO DOBLE EN FUNCIÓN DE TANGENTES

Cuando se quiera expresar las razones trigonométricas del ángulo doble [RT(2x)] en función de la tangente del ángulo simple (Tanx), convendría elaborar el triángulo de las tangentes:



$$\Rightarrow \text{Sen}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 + \text{Tan}^2x}$$

$$\Rightarrow \text{Cos}2x = \frac{1 - \text{Tan}^2x}{1 + \text{Tan}^2x}$$

$$\Rightarrow \text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$$

IV. DEMOSTRACIÓN DE LAS IDENTIDADES FUNDAMENTALES

- Demostración de $Sen2x = 2SenxCosx$

  Sabemos que:

  $Sen(\alpha + \theta) = Sen\alpha Cos\theta + Sen\theta Cos\alpha$

  Haciendo $\alpha = x \wedge \theta = x$ tendremos:

  $Sen(\underbrace{x + x}_{2}) = SenxCosx + SenxCosx$

  $\therefore \boxed{Sen2x = 2Senx.Cosx}$

- Demostración de:

  $Cos2x = Cos^2x - Sen^2x$

  Sabemos que:

  $Cos(\mathbf{a} + \theta) = Cos\alpha Cos\theta - Sen\alpha Sen\theta$

  Haciendo; $\alpha = x \wedge \theta = x$; tendremos:

  $Cos(\underbrace{x + x}_{2}) = CosxCosx + SenxSenx$

  $\therefore \boxed{Cos2x = Cos^2x.Sen^2x}$

- Demostración de:

  $Tan2x = \dfrac{2Tanx}{1 - Tan^2x}$

  Sabemos que:

  $Tan(\alpha + \theta) = \dfrac{Tan\alpha + Tan\theta}{1 - Tan\alpha Tan\theta}$

  Haciendo; $\alpha = x \wedge \theta = x$; tendremos:

  $Tan(\underbrace{x + x}_{2x}) = \dfrac{Tan + tanx}{1 - Tanx.Tanx}$

  $\therefore \boxed{Tan2x = \dfrac{2Tanx}{1 - Tan^2x}}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA EL ÁRCO MITAD

DEFINICIÓN

El objeto de estas igualdades es expresar las razones trigonométricas del ángulo mitad $\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\theta}{2};...\frac{x}{2}\right)$ en términos de las razones trigonométricas del ángulo simple estas igualdades son válidas para todos los valores admisibles de sus variables.

I. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boxed{Sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - Cosx}{2}}}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{Cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + Cosx}{2}}}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{Tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - Cosx}{1 + Cosx}}}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{2n - 1\};\ n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{Cot\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + Cosx}{1 - Cosx}}}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{2n\pi\};\ n \in \mathbb{Z}$

Observación:

El signo que aparece en los radicales depende del cuadrante en el cual se ubique el ángulo mitad $\left(\frac{x}{2}\right)$ y del ordenador que lo afecte.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Simplificar:

$$A = \frac{Sen20° + Sen10°}{2Cos10° + 1}$$

A) Sen5°
B) Sen20°
C) Sen10°
D) Sen15°
E) Sen25°

UNMSM - 2000
NIVEL FÁCIL

Resolución:

Desarrollamos por arco doble

$Sen20° = 2Sen10°.Cos10°$

$$A = \frac{2Sen10°Cos10° + Sen10°}{2Cos10° + 1}$$

Factorizando

$$A = \frac{Sen10°\,\cancel{(2Cos10° + 1)}}{\cancel{2Cos10° + 1}}$$

$A = Sen10°$

Respuesta: C) Sen10°

Problema 2

Si: $Cos4\alpha + 2Sen^2\alpha = 0$ y $Cos2\alpha \pm 0$

Calcule $Cos^2\alpha$

A) 1/12 B) 1/3 C) 2/9
D) 1/8 E) 3/4

UNMSM 2011-I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Por degradación de arco doble

$2Sen^2\alpha = 1 - Cos2\alpha$

Remplazando

$\underbrace{Cos4\alpha + 1}_{} - cos2\alpha = 0$

$2Cos^22\alpha - Cos2\alpha = 0$

$Cos2\alpha(2Cos2\alpha - 1) = 0;\ (Cos2\alpha \neq 0\ )$

Nos queda:

$2Cos2\alpha - 1 = 0$

Por arco doble:

$2(2Cos^2\alpha - 1) - 1 = 0$

$4Cos^2\alpha - 3 = 0$

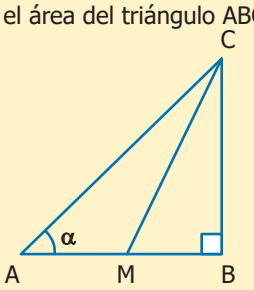
$Cos^2\alpha = 3/4$

Respuesta: E) 3/4

Problema 3

En el gráfico, el triángulo rectángulo ABC es recto en B ($\alpha < 45°$) y AM = MC = 1/2 cm.

Calcular el área del triángulo ABC.



A) $\frac{1}{2}Cos\alpha Sen^3\alpha\ cm^2$

B) $\frac{1}{2}Cos^4\alpha Sen\alpha\ cm^2$

C) $\frac{1}{2}Cos^2\alpha Sen\alpha\ cm^2$

D) $\frac{1}{2}Cos^3\alpha Sen\alpha\ cm^2$

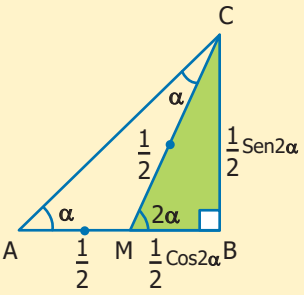
E) $\frac{1}{2}Cos\alpha Sen^2\alpha\ cm^2$

UNMSM 2010–II

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Por resolución en (MCB)



$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Sen2\alpha\right)\frac{1}{2}(1 + Cos2\alpha)$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2Sen2\alpha\right)\frac{1}{2}(2Cos^2\alpha)$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}Sen\alpha Cos^3\alpha\ cm^2$

Respuesta: E) $\sqrt{2} + 1$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA ANGULO MÚLTIPLE II

DESARROLLO DEL TEMA

I. FÓRMULA RACIONALIZADA DEL ÁNGULO MITAD

A. $\boxed{\text{Tan}\frac{x}{2}=\text{Cscx}-\text{Cotx}}$

Demostración de:

$\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)=\text{Cscx}-\text{Cotx}$

Sabemos que:

$\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\text{Sen}\frac{x}{2}}{\text{Cos}\frac{x}{2}}$; multiplicando por:

$2\text{Sen}\frac{x}{2}$ (Numerador y denominador), tendremos:

$$\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\text{Sen}\frac{x}{2}}{\text{Cos}\frac{x}{2}}.\frac{2\text{Sen}\frac{x}{2}}{2\text{Sen}\frac{x}{2}}=\frac{2\text{Sen}^2\frac{x}{2}}{\underbrace{2\text{Sen}\frac{x}{2}\text{Cos}\frac{x}{2}}_{\text{Senx}}}=\frac{1-\text{Cosx}}{\text{Senx}}$$

$$\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\text{Senx}}-\frac{\text{Cosx}}{\text{Senx}} \quad \therefore \quad \boxed{\text{Tan}\frac{x}{2}=\text{Cscx}-\text{Cotx}}$$

B. $\boxed{\text{Cot}\frac{x}{2}=\text{Cscx}+\text{Cotx}}$

Demostración de:

$\text{Cot}\left(\frac{x}{2}\right)=\text{Cscx}+\text{Cotx}$

Sabemos que:

$\text{Cot}\left(\frac{x}{2}\right)\ \frac{\text{Cos}-}{\text{Sen}\frac{x}{-}}$; multiplicando por:

$2\text{Cos}\frac{x}{2}$ (Numerador y denominador), tendremos:

$$\text{Cot}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\text{Cos}\frac{x}{2}}{\text{Sen}\frac{x}{2}}.\frac{2\text{Cos}\frac{x}{2}}{2\text{Cos}\frac{x}{2}}=\frac{2\text{Cos}^2\frac{x}{2}}{\underbrace{2\text{Sen}\frac{x}{2}\text{Cos}\frac{x}{2}}_{\text{Senx}}}=\frac{1+\text{Cosx}}{\text{Senx}}$$

$$\text{Cot}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\text{Senx}}+\frac{\text{Cosx}}{\text{Senx}} \quad \therefore \quad \boxed{\text{Cot}\frac{x}{2}=\text{Cscx}+\text{Cotx}}$$

II. IDENTIDADES AUXILIARES

Sabemos:

- $\text{Cscx} + \text{Cotx} = \text{Cot}\frac{x}{2}$ ..... (I)
- $\text{Cscx} - \text{Cotx} = \text{Tan}\frac{x}{2}$ ..... (II)

(I)+(II) $\Rightarrow$ $\boxed{2\text{Cscx}=\text{Cot}\frac{x}{2}+\text{Tan}\frac{x}{2}}$

(I)−(II) $\Rightarrow$ $\boxed{2\text{Cotx}=\text{Cot}\frac{x}{2}-\text{Tan}\frac{x}{2}}$

Ejercicios de aplicación

- $\text{Csc}40° + \text{Cot}40° = \text{Cot}20°$
- $\text{Csc}6\alpha - \text{Cot}6\alpha = \text{Tan}3\alpha$
- $\text{Cot}20° + \text{Tan}20° = 2\text{Csc}40°$
- $\text{Cot}12\theta - \text{Tan}12\theta = 2\text{Cot}24\theta$

III. IDENTIDADES DEL ÁNGULO TRIPLE

A. $\boxed{\text{Sen3x} = 3\text{Senx} - 4\text{Sen}^3\text{x}}$

Demostración:

$\text{Sen3x} = \text{Sen}(2\text{x}+\text{x})$

$\text{Sen3x} = \text{Sen2xCosx} + \text{Cos2Senx}$

Sabemos por ángulo doble:

$\boxed{\text{Sen2x} = 2\text{SenxCosx}}$

$\boxed{\text{Cos2x} = 1 - 2\text{Sen}^2\text{x}}$

Reemplazando:

$\text{Sen3x} = (2\text{Senx Cosx})\,\text{Cosx} + (1-2\text{Sen}^2\text{x})\,\text{Senx}$

$\text{Sen3x} = 2\text{Senx Cos}^2\text{x} + \text{Sen} - 2\text{Sen}^3\text{x}$

Sabemos: $\boxed{\text{Cos}^2\text{x} = 1 - \text{Sen}^2\text{x}}$

Reemplazando:
$Sen3x = 2Senx\,(1 - 2Sen^2x) + Senx - 2Sen^3x$

$Sen3x = 2Senx - 2Sen^3x + Senx - 2Sen^3x$
$Sen3x = 3Senx - 4Sen^3x$
Análogamente:

$$Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx$$

B. $$Cos3x = Cosx(2Cosx2x-1)$$

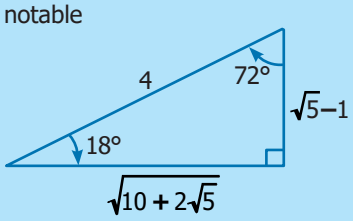
Demostración:
Sabemos: $Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx$

$$Cos3x = Cosx\left(2x\underbrace{2Cos^2x}-3\right)$$

Recordando:

$$1+Cos2x = 2Cos^2x$$ Doble

Observación:
Triángulo notable



$Cos3x = Cosx[2(1+Cos2x)-3]$
$Cos3x = Cosx(2Cos2x-3)$

C. $$Tan3x = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1-3Tan^2x}$$

Demostración:
Sabemos:

$$Tan(A+B+C) = \frac{TanA+TanB+TanC-TanATanBTanC}{1-(TanATanB+TanATanC+TanBTanC)}$$

Sea: $Tan3x = Tan(x+x+x)$

$$Tan3x = \frac{Tanx+Tanx+Tanx-TanxTanxTanx}{1-(TanxTanx+TanxTanx+TanxTanx)}$$

Efectuando operaciones:

$$Tan3x = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1-3Tan^2x}$$

En general:

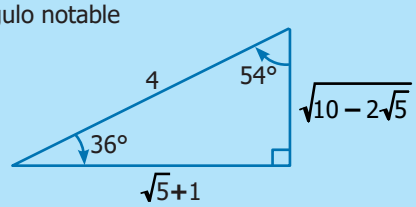
$$Sen3x = 3Senx - 4Sen^3x$$
$$Sen3x = Senx(2Cos2x+1)$$
$$Sen3x = 4SenxSen(60°-x)\,Sen(60°+x)$$

$$Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx$$
$$Cos3x = Cosx(2Cos2x-1)$$
$$Cos3x = 4CosxCos(60°-x)\,Cos(60°+x)$$

$$Tan3x = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1-3Tan^2x}$$
$$Tan3x = TanxTan(60°-x)\,Tan(60°+x)$$

Nota:
$Cot3x = Cotx\,Cot(60°-x)\,Cot(60°+x)$

Observación:
Triángulo notable



PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1
Si: $x+y = \frac{\pi}{2}$ y además $Cot\frac{x}{2} = 2+Secy$
Calcular:
$K = 6Tanx + \sqrt{5}\,Cosx$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

NIVEL INTERMEDIO

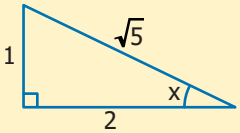
Resolución:
Aplicamos la fórmula de ángulo mitad
$Cscx + Cotx = 2 + Secy$

Por razones complementarias:

$$Secy = Cscx$$

Reemplazando

$Cotx = \frac{2 \rightarrow CA}{1 \rightarrow CO}$



Reemplazando en K

$$K = 6\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow K = 5$$

Respuesta: 5

Problema 2
Hacer más simple la expresión:
$E = 4Cos^2x - Cos3xSecx$
A) 1 B) −1 C) 3
D) 4 E) 5

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

$$E = 4Cos^2x - \left(4Cos^3x - 3Cosx\right)\left(\frac{1}{Cosx}\right)$$

Factorizando en el 2.° término

$$E = 4Cos^2x - Cosx\left(4Cos^2x - 3\right)\left(\frac{1}{Cosx}\right)$$

$E = 4Cos^2x - 4Cos^2x + 3 = 3$

Respuesta: 3

Problema 3

Simplifcar:

$B = Tanx \cdot Cos3x + 2Senx$

A) Sen3x B) Cos3x C) $Sen^2 3x$

D) $Cos^2 3x$ E) $Sen\ \frac{3x}{2}$

UNMSM 2008

NIVEL DIFÍCIL

Resolución:

Sabemos:

$Cos3x = Cosx\,(2Cos2x - 1)$

Reemplazando:

$$B = \left(\frac{Senx}{Cos\,x}\right)Cosx(2Cos2x - 1) + 2Senx$$

Simplificar:

$B = Senx\,(2Cosx\ 2x - 1) + 2\ Senx$

Factorizando: (Senx)

$B = Senx\,(2Cos\ 2x - 1 + 2)$

$B = Senx\,(2Cos\ 2x + 1)$

$B = Sen3x$

Respuesta: Sen3x

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

DESARROLLO DEL TEMA

I. DE SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO

Se le suele llamar también factorización trigonométrica y consiste en expresar mediante un producto una determinada suma o diferencia. Para transformar a producto una expresión, esta deberá estar compuesta por la suma o diferencia de dos senos o cosenos con ángulos ordenados de mayor a menor. Los ángulos resultantes en los factores del producto serán la semisuma y la semidiferencia de los ángulos iniciales.

A. Suma o diferencia de senos a producto

$$\operatorname{Sen}A+\operatorname{Sen}B=2\operatorname{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{Sen}A-\operatorname{Sen}B=2\operatorname{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

B. Suma o diferencia de cosenos a producto

$$\operatorname{Cos}A+\operatorname{Cos}B=2\operatorname{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{Cos}A-\operatorname{Cos}B=-2\operatorname{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

II. DEMOSTRACIÓN DE LAS IDENTIDADES FUNDAMENTALES

A. Demostración de la transformación de senos

Para efectuar estás demostraciones partiremos del seno de la suma y diferencia de dos arcos (identidades de ángulos compuestos).

Sabemos que: $\begin{cases}\operatorname{Sen}(x+y)=\operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}y+\operatorname{Sen}y\operatorname{Cos}x\\ \operatorname{Sen}(x-y)=\operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}y-\operatorname{Sen}y\operatorname{Cos}x\end{cases}$

Sumando tendremos:

$$\operatorname{Sen}(\underbrace{x+y}_{A})+\operatorname{Sen}(\underbrace{x-y}_{B})=2\operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}y$$

Haciendo: $\begin{cases}x+y=A\\ x-y=B\end{cases}$

Se obtiene: $x=\frac{A+B}{2}\wedge y=\frac{A-B}{2}$

$$\therefore\ \operatorname{Sen}(A)+\operatorname{Sen}(B)=2\operatorname{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Restando tendremos:

$$\operatorname{Sen}(\underbrace{x+y}_{A})-\operatorname{Sen}(\underbrace{x-y}_{B})=2\operatorname{Sen}y\operatorname{Cos}x$$

Haciendo: $\begin{cases}x+y=A\\ x-y=B\end{cases}$

Se obtiene: $x=\frac{A+B}{2}\wedge y=\frac{A-B}{2}$

$$\therefore\ \operatorname{Sen}(A)-\operatorname{Sen}(B)=2\operatorname{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

B. Demostración de la transformación de cosenos

Para efectuar estas demostraciones partiremos del coseno de la suma y diferencia de dos arcos (identidades de ángulos compuestos).

Sabemos que: $\begin{cases}\operatorname{Cos}(x+y)=\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y-\operatorname{Sen}x\operatorname{Sen}y\\ \operatorname{Cos}(x-y)=\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y+\operatorname{Sen}x\operatorname{Sen}y\end{cases}$

Sumando tendremos:

$$\operatorname{Cos}(\underbrace{x+y}_{A})+\operatorname{Cos}(\underbrace{x-y}_{B})=2\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y$$

Haciendo: $\begin{cases}x+y=A\\ x-y=B\end{cases}$

Se obtiene: $x=\frac{A+B}{2}\wedge y=\frac{A-B}{2}$

$$\therefore \boxed{Cos(A)+Cos(B)=2Cos\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

Restando tendremos:

$$Cos(\underbrace{x+y}_{A})-Cos(\underbrace{x-y}_{B})=-2SenxSeny$$

Haciendo: $\begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases}$

Se obtiene: $x=\frac{A+B}{2} \wedge y=\frac{A-B}{2}$

$$\therefore \boxed{Cos(A)-Cos(B)=-2Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

III. DE PRODUCTO A SUMA O DIFERENCIA

Se le suele llamar también desdoblamiento del producto y consiste en expresar mediante una suma o diferencia un determinado producto.

Para efectuar el desdoblamiento se deberá tener el doble producto de senos y/o cosenos.

Los ángulos resultantes en el desdoblamiento serán la suma y la diferencia de los ángulos iniciales.

$$\boxed{\begin{array}{l} 2SenACosB=Sen(A+B)+Sen(A-B) \\ 2CosACosB=Cos(A+B)+Cos(A-B) \\ 2SenASenB=Cos(A-B)-Cos(A+B) \end{array}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Simplificar:

$$A=\frac{Sen17°+Cos17°}{Sen31°\,Cos31°}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Resolución:

Por ángulos complementarios:

$$\boxed{Sen17°=Cos73°}$$

$$A=\frac{Cos73°+Cos17°}{Sen31°Cos31°}$$

Transformando a producto:

$$A=\frac{2Cos45°\,Cos28°}{Sen31°Cos31°}$$

$$=\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Cos28°}{\frac{2}{2}Sen31°\,Cos31°}$$

Reemplazando y aplicando artificio en el denominador.

Operando convenientemente:

$$A=\frac{2\sqrt{2}Cos28°}{Sen62°}$$

Por razones complementarias

$$A=\frac{2\sqrt{2}Cos28°}{Cos28°} \rightarrow A=2\sqrt{2}$$

Respuesta: $2\sqrt{2}$

Problema 2

Si $Tan\alpha=3;\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

calcule $N=\frac{Sen8\alpha-Sen4\alpha}{2Sen\alpha\,Cos6\alpha}$

A) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

UNMSM - 2014

Resolución:

Transformando a producto el numerador.

$$N=\frac{2Cos6\alpha\,Sen2\alpha}{2Sen\alpha\,Cos6\alpha}=\frac{Sen2\alpha}{Sen\alpha}$$

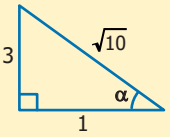
Por seno del doble

$$N=\frac{2Sen\alpha\,Cos\alpha}{Sen\alpha} \rightarrow N=2Cos\alpha \ldots\ (I)$$

Dato:

$Tan\alpha=\frac{3}{1}$

En (I)



$$N=2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \rightarrow N=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Respuesta: $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Problema 3

Calcule:

$K=Cos40°+Cos80°+Cos160°$

A) 1 B) −1

C) 0 D) 1/2

E) −1/2

UNMSM - 2008

Resolución:

Agrupando:

$K=(Cos80°+Cos40°)+Cos160°$

Transformando a producto y por reducción al primer cuadrante:

$K=2Cos60°\,Cos20°+Cos(180°-20°)$

Por fórmula y reemplazando valores:

$$K=2\left(\frac{1}{2}\right)Cos20°+(-Cos20°) \rightarrow K=0$$

Respuesta: 0

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN DE ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Son igualdades establecidas entre expresiones que involucran razones trigonométricas de una o más variables y que se verifican para cierto número de valores de dichas variables.

Para que una igualdad sea considerada como una ecuación trigonométrica, la variable deberá estar afectada de algún operador trigonométrico; tal como se observará en los ejemplos siguientes:

1. $Senx + 2Cos3x = 1$
   Sí es ecuación trigonométrica
2. $3Senx + Cos2x = 2$
   Sí es ecuación trigonométrica
3. $SenxCos2x = Sen3x$
   Sí es ecuación trigonométrica
4. $x + Senx = 1 + Sen2x$
   No es ecuación trigonométrica
5. $x + Sen3x = x^2 + 1$
   No es ecuación trigonométrica
6. $x + Cosx = x^2 + Senx$
   No es ecuación trigonométrica

II. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Se llamará solución de una ecuación trigonométrica al valor de la variable que verifica la igualdad y el conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación trigonométrica se le llamará conjunto solución de la ecuación.

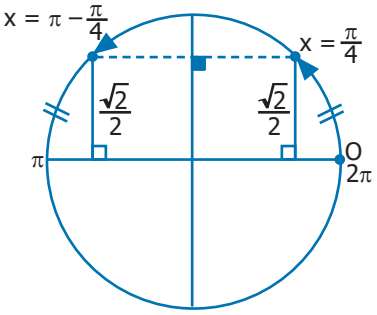
Resolver una ecuación trigonométrica consiste en determinar todas las soluciones de la ecuación; es decir consiste en determinar su conjunto solución.

Ejemplo:

Resuelva e indique las dos primeras soluciones positivas de: $Senx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolución:

Como se conoce el valor del seno, se le ubica en la C.T. y se busca los arcos en los cuadrantes correspondientes; en este caso como el seno es positivo buscaremos en el primer y segundo cuadrante los dos primeros arcos positivos que cumplen la igualdad.



Luego para que: $Senx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Se observa que: $x = \left\{\frac{\pi}{4}; \pi - \frac{\pi}{4}\right\}$

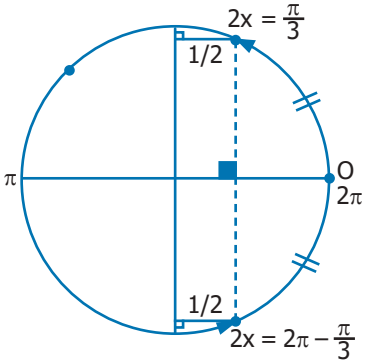
$\therefore \boxed{x = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}}$ Soluciones de la E.T.

Ejemplo

Resuelva e indique las tres primeras soluciones positivas de: $Cos2x = \frac{1}{2}$

Resolución:

Como el coseno es positivo lo ubicamos en el primer y cuarto cuadrante y buscaremos los tres primeros arcos positivos que cumplen la igualdad.



La igualdad: $Cos2x = \frac{1}{2}$ se cumple cuando:

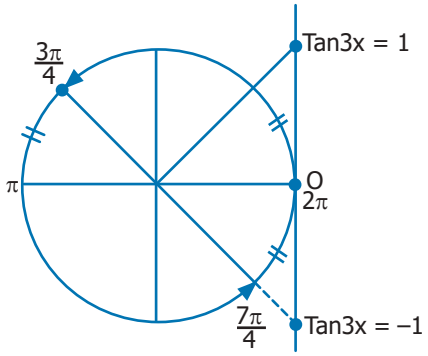
$2x = \left\{\frac{\pi}{3}; 2\pi - \frac{\pi}{3}; 2\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$

$\Rightarrow 2x = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right\}$

$\therefore \boxed{x = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}}$ Soluciones de la E.T.

Ejemplo:
Resuelva e indique las cuatro primeras soluciones positivas de: $Tan3x = -1$

Resolución:
Para resolver esta igualdad se ubica el arco para el cual la tangente es igual a 1 y se toma como referencia este valor para encontrar los arcos donde la tangente es igual a -1.



La igualdad: $Tan3x = -1$ se cumple cuando el ángulo:

$3x = \left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; 2\pi + \frac{3\pi}{4}; 2\pi + \frac{7\pi}{4}\right\}$

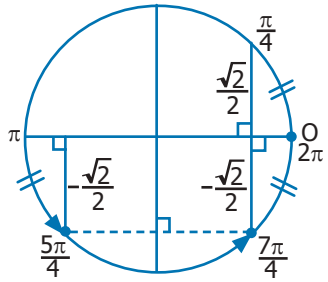
$\Rightarrow 3x = \left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}\right\}$

$\therefore \boxed{x = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{5\pi}{4}\right\}}$ Soluciones de la E.T.

Ejemplo:
Resuelva e indique las cuatro primeras soluciones positivas de: $Sen\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolución:

En la C.T. ubicamos para qué arco del seno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y luego tomaremos este valor como referencia para encontrar los arcos donde el seno es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



La igualdad: $Sen\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ se cumplirá cuando el ángulo:

$3x - \frac{\pi}{4} = \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; 2\pi + \frac{5\pi}{4}; 2\pi + \frac{7\pi}{4}\right\}$

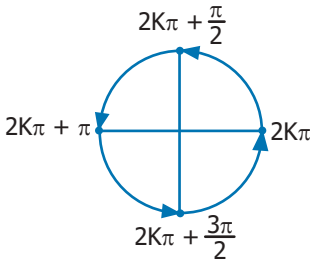
$3x - \frac{\pi}{4} = \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}\right\}$

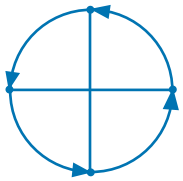
$3x = \left\{\frac{3\pi}{2}; 2\pi; \frac{7\pi}{2}; 4\pi\right\}$

$\therefore \boxed{x = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right\}}$

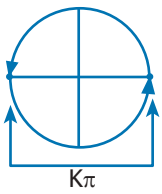
III. SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

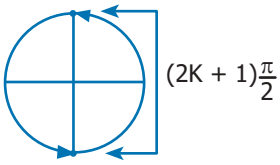
Es la expresión en la cual se encuentran generalizadas todas las soluciones de una ecuación trigonométrica.
Estas expresiones están dadas mediante la regla de formación existente entre las soluciones de la ecuación trigonométrica y son obtenidas usualmente a partir de las formas generales establecidas en la circunferencia trigonométrica ($K \in \mathbb{Z}$).





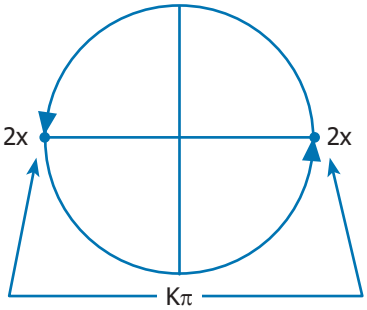
$\measuredangle cuadr. = K\frac{\pi}{2}$





Ejemplo
Resuelva la ecuación e indique su solución general; siendo: $2Sen2x = 0$

Resolución:
En la C.T. ubicamos dónde el seno es cero, a partir de lo cual generalizaremos la solución de la ecuación:



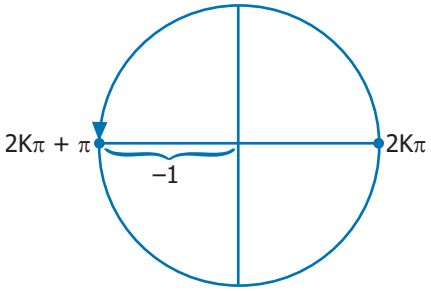
$\Rightarrow Sen2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = K\pi$

$\therefore x = \frac{K\pi}{2}$ $K \in \mathbb{Z}$

Ejemplo:
Resuelva la ecuación e indique su solución general; siendo: $Sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$

Resolución:
En la C.T. ubicamos dónde el coseno es –1, a partir de lo cual se generalizará la solución de la ecuación.



$$\Rightarrow Sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=2K\pi+\pi$$

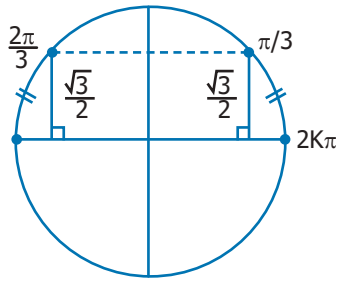
$$2x=2K\pi+\frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \boxed{x=K\pi+\frac{2\pi}{3}}\ K\in\mathbb{Z}$$

Solución general

Ejemplo:
Resuelva e indique la solución general de: $Sen2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución:
En la C.T. ubicamos dónde el seno es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y generalizamos los arcos que cumplen con la igualdad.



$$\Rightarrow Sen2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$$

En general:

$$\Leftrightarrow 2x=\left\{2K\pi+\frac{\pi}{3};\ 2K\pi+\frac{2\pi}{3}\right\}$$

$$\therefore \boxed{x=\left\{K\pi+\frac{\pi}{6};\ K\pi+\frac{\pi}{3}\right\}}\ K\in\mathbb{Z}$$

IV. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Son aquellas igualdades en las cuales se conoce el valor de una razón trigonométrica de una determinada variable y son de la forma:

$$\boxed{R.T(\omega x+\theta)=n}$$

Donde:
- x: variable o incognita
- ω: coeficiente angular
- n: valor de la R.T. ($n\in R$)

1. $Senx = 2/3$
   Ecuación trigonométrica elemental
2. $Cos2x = 3/4$
   Ecuación trigonométrica elemental
3. $Tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-2$
   Ecuación trigonométrica elemental
4. $Senx + Cos2x = 1$
   Ecuación trigonométrica no elemental
5. $Sen2x = 1 + Tanx$
   Ecuación trigonométrica no elemental
6. $SenxCosx = Tanx$
   Ecuación trigonométrica no elemental

V. EXPRESIONES GENERALES PARA LOS ARCOS

Cuando se conoce el de una razón trigonométrica (ecuación elemental), el arco o ángulo que cumple con la igualdad se puede generalizar a partir de las formas generales establecidas en la C.T., siendo estas las siguientes:

1. Si se conoce el seno

Si: $Sen\theta = a \Rightarrow VP(\theta) = ArcSen(a)$

$$\therefore \boxed{\theta_G=K\pi+(-1)^K.VP(\theta)}\ K\in\mathbb{Z}$$

2. Si se conoce el coseno

Si: $Cos\theta = a \Rightarrow VP(\theta) = ArcCos(a)$

$$\therefore \boxed{\theta_G=2K\pi\pm VP(\theta)}\ K\in\mathbb{Z}$$

3. Si se conoce la tangente

Si: $Tan\,\theta = a \Rightarrow VP(\theta) = ArcTan(a)$

$$\therefore \boxed{\theta_G=K\pi+VP(\theta)}\ K\in\mathbb{Z}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Resolver: $2\text{Cos}2x - \sqrt{3} = 0$

Indicar las 3 primeras soluciones.

A) $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{7}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{12}\right\}$

D) $\left\{0; \frac{\pi}{12}; \frac{13}{12}\right\}$

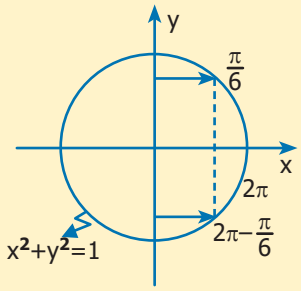
E) $\left\{\frac{4\pi}{11}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right\}$

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

$2\text{Cos}2x - \sqrt{3} = 0$

$\rightarrow \text{Cos}2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ IC, IVC



De la C.T.

$2x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{12}$

$2x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \rightarrow x = \frac{11\pi}{12}$

$2x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} \rightarrow x = \frac{13\pi}{12}$

$\therefore \text{C.S.} = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}\right\}$

Respuesta: $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}\right\}$

Problema 2

Resolver: $\text{Tan}3x + \sqrt{3} = 0$, indicar la suma de las 2 primeras soluciones positivas.

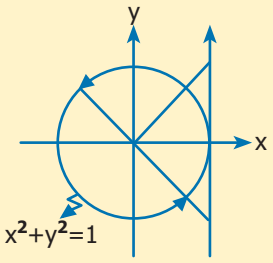
A) 100° B) 120° C) 140°
D) 160° E) 80°

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

$\text{Tan}3x = -\sqrt{3} \begin{cases} \text{IIC} \\ \text{IVC} \end{cases}$

Para resolver se ubica en la C.T. el arco para el cual la tangente es igual a $\sqrt{3}$ y se toma como referencia este valor para encontrar los arcos donde la tangente es $(-\sqrt{3})$.



$\text{Tan}3x = \sqrt{3} \rightarrow \text{Tan}60° = \sqrt{3}$

De la C.T.

$3x = 180° - 60° \rightarrow x = 40°$

$3x = 360° - 60° \rightarrow x = 100°$

Incognita

$40° + 100° = 140°$

Respuesta: 140°

Problema 3

Resolver: $\text{Sen}2x = \text{Cos}x$

Para $x \in [0, 2\pi]$, indicar el número de soluciones.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

NIVEL DIFÍCIL

Resolución:

Por el seno del ángulo doble

$2\text{Sen}x.\text{Cos}x = \text{Cos}x$

No conviene eliminar miembro a miembro, porque estaríamos eliminando un conjunto solución, entonces:

$2\text{Sen}x\text{Cos}x - \text{Cos}x = 0$

$\rightarrow \text{Cos}x(2\text{Sen}x - 1) = 0$

$\text{Cos}x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$2\text{Sen}x - 1 = 0 \rightarrow \text{Sen}x = \frac{1}{2} \begin{cases} \text{IC} \\ \text{IVC} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

Respuesta: Número de soluciones = 4

PÁRIS para AMOR A SOFÍA

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

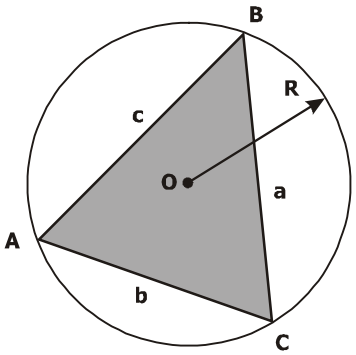
DESARROLLO DEL TEMA

I. CONCEPTOS PREVIOS

1. Todo triángulo que no es rectángulo, es denominado triángulo oblicuángulo.
2. Resolver un triángulo oblicuángulo consiste en determinar los elementos principales de esta figura (lados y ángulos), partiendo de algunos de ellos que deben ser conocidos (uno de ellos debe ser un lado).
3. Dependiendo de los datos que se tenga en el triángulo, se pueden aplicar diferentes teoremas para poder resolver esta figura; siendo los teoremas fundamentales los siguientes:
   – Teorema del seno
   – Teorema del coseno
   – Teorema de las tangentes
   – Teorema de las proyecciones.

A. Ley de senos

En todo triángulo oblicuángulo se cumple que las medidas de sus lados son directamente proporcionales a los senos de sus respectivos ángulos opuestos, siendo la constante de proporcionalidad el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} = 2R}$$

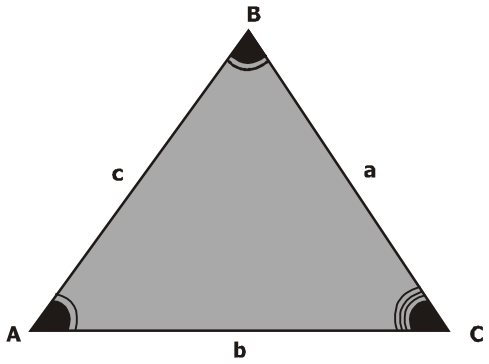
R: Circunradio

De donde:

$$\boxed{a = 2RSenA}$$
$$\boxed{b = 2RSenB}$$
$$\boxed{c = 2RSenC}$$

B. Ley de cosenos

En todo triángulo oblicuángulo se cumple que el cuadrado de la medida de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados menos el doble producto de estos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.



$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA}$$
$$\Rightarrow \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB}$$
$$\Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC}$$

De donde se tendrá:

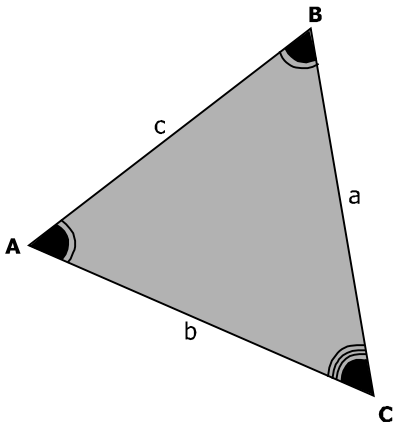
$$\boxed{CosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$\boxed{CosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

$$\boxed{CosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

C. Ley de las tangentes

En todo triángulo oblicuángulo se cumple que la diferencia de las medidas de dos de sus lados es a la suma de estas medidas, como la tangente de la semidiferencia es a la tangente de la semisuma de los respectivos ángulos opuestos a los lados considerados.



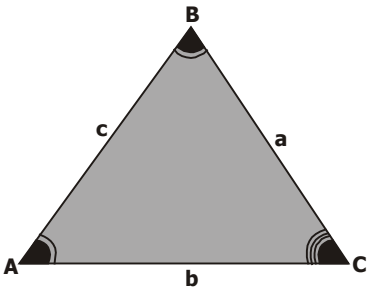
$$\Rightarrow \boxed{\frac{a-b}{a+b}=\frac{\text{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{b-c}{b+c}=\frac{\text{Tan}\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\text{Tan}\left(\frac{B+C}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a-c}{a+c}=\frac{\text{Tan}\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\text{Tan}\left(\frac{A+C}{2}\right)}}$$

D. Ley de las proyecciones

En todo triángulo oblicuángulo se cumple que la medida de un lado es igual a la suma de las medidas de los otros dos lados multiplicados cada uno de ellos por el coseno del ángulo opuesto al otro.

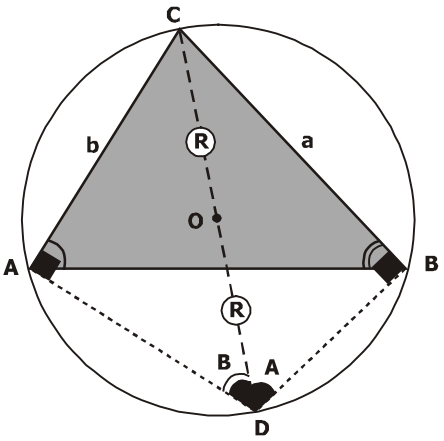


$\Rightarrow$ $\boxed{a = b.CosC + c.CosB}$

$\Rightarrow$ $\boxed{b = a.CosC + c.CosA}$

$\Rightarrow$ $\boxed{c = a.CosB + b.CosA}$

III. DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE SENO



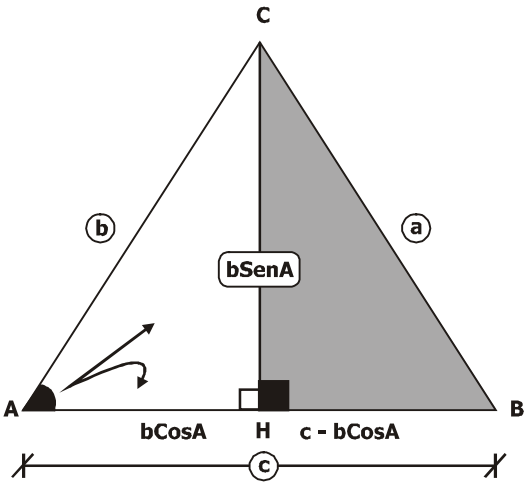
- Trazamos el diámetro CD, entonces: CD = 2R.
- Al unir el punto D con los vértices A y B se obtienen los triángulos rectángulos CAD y CBD donde se observa: $m\sphericalangle CDB = m\sphericalangle A \wedge m\sphericalangle CDA = m\sphericalangle B$
- $\triangle$CBD:

  $\frac{a}{2R} = SenA \Rightarrow \boxed{\frac{a}{SenA} = 2R}$
- $\triangle$CAD:

  $\frac{a}{2R} = SenB \Rightarrow \boxed{\frac{b}{SenA} = 2R}$
- En forma análoga se deduce que $\boxed{\frac{c}{SenC} = 2R}$; finalmente se puede establecer que:

$$\boxed{\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC}=2R}$$

IV. DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE COSENO



- Trazamos la altura CH, determinándose los triángulos rectángulos CHA y CHB.
- $\triangle$CHA: (Resolución de triángulos)

  $AH = bCosA \wedge CH = bSenA$

- $\triangle$CHB: (Teorema de Pitágoras)

$a^2 = (bSenA)^2 + (c - bCosA)^2$

$a^2 = b^2Sen^2A + c^2 + b^2Cos^2A - 2bcCosA$

$a^2 = b^2\underbrace{(Sen^2A + Cos^2A)}_{1} + c^2 - 2bc.CosA$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.CosA}$$

V. DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LAS TANGENTES

- Sabemos por el teorema del seno que:

$a = 2RSenA \wedge b = 2RSenB$

- Dividiendo se tendrá:

$$\frac{a}{b} = \frac{2RSenA}{2RSenB} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{SenA}{SenB}$$

- Aplicando proporciones:

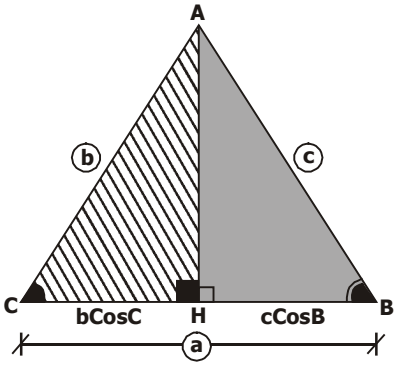
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{SenA - SenB}{SenA + SenB}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{2Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)Cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = Tan\left(\frac{A-B}{2}\right).Cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{Tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}}$$

VI. DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LAS PROYECCIONES



- Para calcular el lado a, trazamos la altura AH.
- Se determinan los triángulos rectángulos AHC y AHB, en los cuales los lados b y c son sus hipotenusas.
- Aplicando resolución de triángulos rectángulos en los triángulos determinados se tendrá:

$$CH = bCosC \wedge HB = cCosB$$

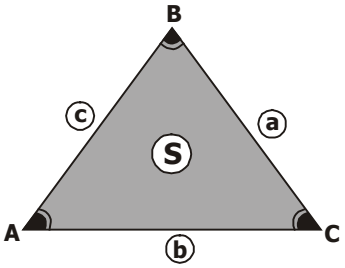
- En el triángulo ABC, se observa que:

$$BC = CH + HB$$

$$\therefore \boxed{a = bCosC + cCosB}$$

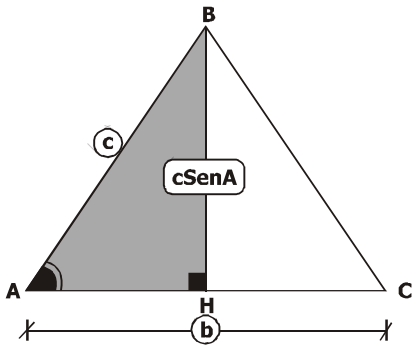
VII. ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR

El área de la región triangular es igual al semiproducto de las medidas de dos de sus lados multiplicado por el seno del ángulo comprendido entre dichos lados.



$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{bc}{2}SenA = \frac{ac}{2}SenB = \frac{ab}{2}SenC}$$

Demostración:



- Trazamos la altura BH, determinándose los triángulos rectángulos BHA y BHC.
- $\triangle$BHA: (Resolución de Triángulos)

$$\boxed{BH = cSenA}$$

- $\triangle$ABC: (Por Geometría)

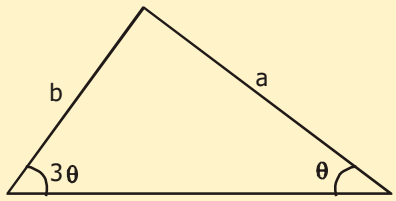
$$S = \frac{(AC)(BH)}{2} = \frac{(b)(c.SenA)}{2}$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{bc}{2}SenA}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

De la figura calcular: $Cos2\theta$



A) $a - b$ B) $a + b$
C) ab D) $\frac{a+b}{2a}$
E) $\frac{a-b}{2b}$

Resolución:

Por ley de senos

$$\frac{a}{Sen3\theta} = \frac{b}{Sen\theta}$$

Sabemos:

$$Sen3\theta = Sen\theta(2Cos2\theta + 1)$$

Reemplazando:

$$\frac{a}{Sen\theta(2Cos2\theta + 1} = \frac{b}{Sen\theta}$$

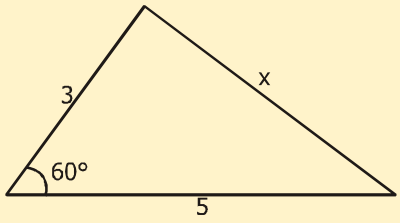
$$\rightarrow \frac{a}{b} = 2Cos2\theta + 1$$

$$\rightarrow Cos2\theta = \frac{a-b}{2b}$$

Respuesta: $\frac{a-b}{2b}$

Problema 2

De la figura, calcular "x".



A) $\sqrt{19}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{15}$
D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{13}$

Resolución:

Por ley de cosenos:

$$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)Cos60°$$

$$\rightarrow x^2 = 34 - 2(15)\left(\frac{1}{2}\right)$$

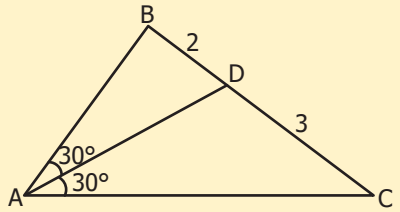
$$x^2 = 19$$

$$x = \sqrt{19}$$

Respuesta: $\sqrt{19}$

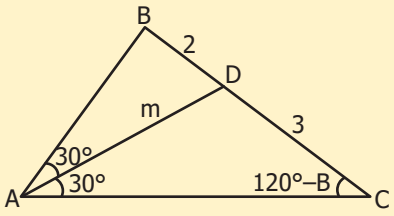
Problema 3

De la figura ABC. Hallar el ángulo "B"



A) $arcSen3\sqrt{3}$ B) $arcTan\sqrt{3}$
C) $arcTan3$ D) $arcSen3\sqrt{3}$
E) $arcTan3\sqrt{3}$

Resolución:



Por ley de senos en el ΔABD:

$$\frac{m}{SenB} = \frac{2}{Sen30°} \Rightarrow m = \frac{2SenB}{Sen30°} \quad ...(1)$$

También en el ΔADC:

$$\frac{m}{Sen(120° - B)} = \frac{3}{Sen30°}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3Sen(60° + B)}{Sen30°} \quad ...(2)$$

(1) = (2)

$$\Rightarrow 2SenB = 3Sen(60° + B)$$

$$2SenB = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}CosB + \frac{1}{2}SenB\right)$$

$$4SenB = 3\sqrt{3}CosB + 3SenB$$

$$\Rightarrow SenB = 3\sqrt{3}CosB \Rightarrow TanB = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow B = arcTan3\sqrt{3}$$

Respuesta: arcTan3√3